Ma.
o.
140

Ma.
o.
140

Ma. 1-99
o-140.

Wissenschaft
der
Mathematik
nach heuristisch-genetischer Methode.

Erstes Heft.

Mit einer Einleitung
über die
Methode der Mathematik
als
Lehrobjekt und als Wissenschaft.

Von
Dr. Karl W. E. *Mager*.

Berlin.
Albert Förstner.
1837.

140

Algebra

Alea

0. 140

Ueber die

Methode der Mathematik

als

Lehrobjekt und als Wissenschaft.

Einleitung zum Leitfaden.

Von

Dr. Karl W. E. *Mager*.

Berlin,
Albert Förstner.
1837.

Wissenschaft
der
Mathematik
nach heuristisch-genetischer Methode.

Leitfaden beim Schulunterricht.

Von

Dr. Karl W. E. Mager.

Martinek

Erstes Heft:

Theorie der sieben Operationen mit wirklichen Zahlen. Nebst einer praktischen Beilage.

Berlin,
Albert Förstner.

1837.

BIBL. BAMBERGENSIS

Intelligenti pauca.

Staatliche Bibliothek Bamberg

Ueber die

Methode der Mathematik

als

Lehrobjekt und als Wissenschaft.

Bekanntlich wird die Arithmetik und die allgemeinen Wissenschaften der diskreten Größe vorzugsweise analytische Wissenschaft und Analysis genannt. Die Erkenntnißweise derselben ist in der That am immanentesten analytisch, und es ist kürzlich zu betrachten, worauf sich dies gründet. — Das sonstige analytische Erkennen fängt von einem konkreten Stoffe an, der eine zufällige Mannichfaltigkeit an sich hat.... Der arithmetische und algebraische Stoff dagegen ist ein schon ganz abstrakt und unbestimmt Gemachtes, an dem alle Eigenthümlichkeit des Verhältnisses getilgt, dem somit nun jede Bestimmung und Verknüpfung ein Aeußerliches ist. Ein solches ist das Prinzip der diskreten Größe, das *Eins*. Dies verhältnißlose Atome kann zu einer *Vielheit* vermehrt und äußerlich zu einer Anzahl bestimmt und vereinigt werden; dieses Vermehren und Begrenzen ist ein leeres Fortgehen und Bestimmen, welches bei demselben Prinzip des abstrakten Eins stehen bleibt. Wie die *Zahlen* ferner zusammengefaßt und getrennt werden, hängt allein von dem Setzen des Erkennenden ab. Die *Größe* ist überhaupt die Kategorie, innerhalb welcher diese Bestimmungen gemacht werden; — was die *gleichgültig* gewordene Bestimmtheit ist, so daß der Gegenstand keine Bestimmtheit hat, welche ihm immanent, also dem Erkennen *gegeben* wäre. Insofern sich das Erkennen zunächst eine zufällige Verschiedenheit von Zahlen gegeben hat, so machen sie nun den Stoff für eine weitere Bearbeitung und mannichfaltige Verhältnisse aus. Solche Verhaltnisse, deren Erfindung und Bearbeitung, scheinen zwar nichts dem analytischen Erkennen Immanentes, sondern ein Zufälliges und Gegebenes zu sein, wie denn auch diese Verhältnisse und die sich auf sie beziehenden Operationen gewöhnlich *nacheinander*, als *verschiedene* ohne Bemerkung eines innern Zusammenhanges vorgetragen werden. Allein es ist leicht, ein fortleitendes Prinzip zu erkennen, und zwar ist es das Immanente der analytischen Identität, die am Verschiedenen als *Gleichheit* erscheint; der Fortschritt ist die Reduktion des Ungleichen auf immer größere Gleichheit. Um ein Beispiel an den ersten Elementen zu geben, so ist die Addition das Zusammenfassen ganz zufällig *ungleicher* Zahlen, die Multiplikation dagegen von *gleichen*, worauf noch das Verhältniß der *Gleichheit* von der *Anzahl* und der *Einheit* folgt, und das Potenzenverhältniß eintritt.

Weil nun die Bestimmheit des Gegenstandes und der Verhältnisse eine *gesetzte* ist, so ist die weitere Operation mit ihnen auch ganz analytisch, und die analytische Wissenschaft hat daher nicht sowohl *Lehrsätze* als *Aufgaben*. Der analytische Lehrsatz enthält die Aufgabe schon für sich selbst als gelöst, und der ganz äußerliche Unterschied, der den beiden Seiten, die er gleich setzt, zukommt, ist so unwesentlich, daß ein solcher Lehrsatz als eine triviale Identität erscheinen würde......

.... Statt der Form der Lehrsätze wählt man daher sogleich die Form der Aufgabe, der Forderung der Operation, nämlich das Aussprechen nur der Einen Seite von der Gleichung, die den Lehrsatz ausmachen würde, und deren andere Seite nun gefunden werden soll..... Es ist daher ein ganz überflüssiges Gerüste, hier die Form der geometrischen Methode, welche sich auf synthetische Sätze bezieht, anzuwenden und der Aufgabe außer der Auflösung auch noch einen Beweis folgen zu lassen. Er kann nichts als die Tautologie ausdrücken, daß die Auflösung richtig ist, weil man operirt hat, wie aufgegeben war.

Hegel. Logik. (Werke V. 282 — 285.)

Einsichtige Freunde rathen mir dringend, dieses Heft mit einer Einleitung zu versehen. Sowohl die dem Inhalte in dieser Darstellung der Mathematik gegebene Organisation, als die Methode, vermittelst welcher der Inhalt hier erzeugt worden ist, bedürfen nach ihnen mannichfacher vorläufiger Erörterungen und Erläuterungen, wenn anders, sagen sie, der Zweck dieser Blätter, die Lehrer der Mathematik für die darin befolgte Methode zu gewinnen, in einiger Ausdehnung erreicht werden soll. Dürften Autoren ihrer Neigung folgen, so würden keine Vorreden geschrieben; überdies will es mir scheinen, als bedürfe diese Arbeit, um in ihrem Prinzip begriffen und ihrem Zwecke gemäß benutzt zu werden, nur eines aufmerksamen Lesers. Da ich indeß gern den sichersten Weg gehe, so will ich thun, was man von mir verlangt, bitte aber um die Erlaubniß, diese einleitenden Explikationen etwas memoirenartig beginnen zu dürfen.

Will der geneigte Leser die Güte haben, sich in die Lage eines jungen Mannes hineinzudenken, der, mit allerlei Kenntnissen ausgestattet, aber ohne Kenntniß der didaktischen Wissenschaft, es übernommen hat, ein paar Knaben für die höheren Gymnasialklassen vorzubereiten, so fallen ihm zweifelsohne alle die inneren und äußeren Schwierigkeiten von selbst ein, welchen ein solches Unternehmen unter solchen Umständen begegnen muß. Habe auch ein junger Gelehrter, der nur nicht methodisch zum Lehrer ausgebildet worden ist, den besten Willen, den regsten Eifer, die gewissenhafteste Treue, fehle ihm auch eine gewisse natürliche Lehrgabe und Mittheilungsfähigkeit nicht: es fehlt ihm, von der durch Uebung erst zu gewinnenden Lehrkunst gar nicht zu reden, doch die Wissenschaft des Lehrens, die Einsicht in die Weise, wie der kindliche Geist Kenntnisse und Bildung erwirbt, und er sieht sich demnach auf ein didaktisches Experimentiren angewiesen, das zwar für den Lehrenden selbst mit der Zeit den allergrößten Nutzen haben kann, vor der Hand aber seine Thätigkeit schwankend und ungedeihlich macht und auf den Lernenden jedenfalls nur

dann nicht ungünstig wirken muß, wenn der Lehrer aufrichtig und, ich setze hinzu, klug genug ist, um den Schüler in sein Geheimniß zu ziehen und mit ihm gemeinschaftlich auf Entdeckung der rechten Methode auszugehen.

Ich habe mich vor mehreren Jahren in einer solchen Lage befunden. Die philosophische Wissenschaft war mir unbekannt, wenigstens in derjenigen Gestalt, welche sie durch dasjenige Organon der denkenden Erkenntniß erhalten hat, aus welchem oben eine Stelle mitgetheilt worden ist. Wie ich es angestellt, um eine Methode für den Unterricht in anderen Fächern, z. B. den Sprachen, zu finden, das theile ich vielleicht gelegentlich an einem andern Orte mit; hier habe ich nur von meinem damaligen Suchen nach einer erkenntniß- und sachgemäßen Methode des mathematischen Unterrichts zu reden. Es verdenkt mir wol Niemand, daß meine Freude groß war, als ich zwei Jahre später fand, daß meine Bemühungen im Wesentlichen dasselbe Resultat gehabt hatten, welches sich für Hegel aus der Natur der Idee des Erkennens ergeben hat. Denn es gibt, und zwar zum Glücke für die Philosophie wie für die Welt, eine unbewußte Philosophie, einen Instinkt des Wahren, der die Errungenschaft der Spekulation sich gleichsam vorausnimmt. Wenn auch die Philosophie den Vorzug hat, das Vernünftige in der Form des Vernünftigen zu besitzen, so ist darum die Nichtphilosophie von der Vernunft nicht ausgeschlossen.

Es bedurfte keines besondern Scharfsinnes, um gleich anfänglich herauszubringen, daß es für jeden Unterricht, und so auch für den mathematischen, zwei Stufen und zwei Methoden, eine elementarische und eine wissenschaftliche geben und daß die erste der letzten vorangehen muß. Philosophie und Erfahrung lehren, daß das Bewußtsein von der sinnlichen Gewißheit und Wahrnehmung ausgeht und erst durch vielfache Metamorphosen seines Inhalts zur wahrhaften Wahrheit und Vernunft gelangt. So lange man also auf dasjenige sieht, was in der Geschichte des sich bildenden Individuums das Erste ist, so lange man nur berücksichtigt, wie es im Vorstellen historisch zugeht, so lange gilt das von der neuern Pädagogik zur Grundmaxime erhobene Kant'sche Dictum, daß Begriffe ohne Anschauungen leer sind, daher jeder Unterricht vom Anschaulichen beginnen muß *). Demzufolge setzte ich fest, daß die elementarische Methode die sinnliche

*) Sieht man darauf, was denn im Begriffe das Erste, was denn das Wahre ist, so zeigt sich, daß die Unmittelbarkeit der Anschauung keinesweges das bedingende Reelle, diese Realität vielmehr ein im Begriffe aufgehobener Schein ist.

Anschauung zum Ausgangspunkte haben müsse, aus deren Mannichfaltigem alsdann der Verstand erst ein Allgemeines oder Abstraktes herauszuziehen habe. Wogegen, schloß ich weiter, die wissenschaftliche Methode erst da auftreten darf, wo das lernende Subjekt im Besitz jener konkreten Grundlage und fortan fähig ist, mit Verschmähung aller sinnlichen Hülfsmittel das Abstrakte aufzufassen, als wäre es ein sinnlich Wahrnehmbares.

Eben so leicht war einzusehen, daß von einer Scheidung des mathematischen oder irgend eines andern Unterrichtsstoffes, etwa in einen elementarisch und in einen andern wissenschaftlich zu lehrenden Theil, nicht die Rede sein könne, vielmehr der wissenschaftliche Unterricht für sich von dem vorangegangenen elementarischen keinen andern Vortheil müsse ziehen wollen, als den, einen dadurch zum Lernen geschickt gemachten Schüler in die Hände geliefert zu bekommen. In der Volksschule bringt es die Natur der Sache mit sich, daß, da der Schüler nicht über den elementarischen Unterricht hinausgeführt werden soll, der Unterricht eben so sehr nach dem materialen Zwecke, tüchtige Rechner zu machen, als nach dem formalen Zwecke, den Verstand des Lernenden überhaupt zu bilden, strebe; — wie klar man aber auch einsehen möge, daß ein zu blos formalen Zwecken gegebener Unterricht ein Unding, ein Phantom der schlechten Abstraktion ist, wie vernünftig und nöthig es auch ist, daß man das materiale Kennen und Können überall nicht vernachlässige und geringschätze: so ist doch eben so klar, daß bei jungen Leuten, die, weil sie einer höhern Bildung theilhaftig werden sollen, lange Schuljahre vor sich sehen, der elementarische Unterricht über Zahl und Form (ja über jeden Gegenstand) einen vorherrschend formalen Zweck haben, und hauptsächlich als Vorbereitung für den spätern wissenschaftlichen Unterricht betrachtet werden muß. Ob dieser spätere wissenschaftliche Unterricht einen formalen oder sehr materialen Zweck hat, nämlich den, Kenner und Könner der Mathematik zu bilden, das ist eine sehr müßige und im Grunde sinnlose Frage, indem sich nämlich beweisen läßt, daß diejenige Methode, welche sich formell als die förderlichste, demnach als die geistbildendste erweist, auch die meisten und besten Kenntnisse gibt, also den materialen Zweck am vollkommensten erreicht. Ja noch mehr, dieselbe Methode, welche man für formale und materiale Bildung als die günstigste anerkennen muß, stellt sich auch als diejenige dar, welche den wissenschaftlichen Organismus treuer als jede andere, nämlich g e n e t i s c h explizirt. Wenn von Methode gesprochen wird, so kann dieselbe zunächst als eine bloße Art und Weise des Erkennens er-

scheinen; — es ist dies die pädagogische Betrachtung, und man muß sie bis auf einen gewissen Punkt gelten lassen. Dieser Gesichtspunkt zeigt aber doch nur Eine Seite der Sache, und verführt, die Methode für eine blos äußerliche Form zu halten, die nur einem Gegenstande applizirt werde. So spricht man in der Geschichte von einer chronologischen, ethnographischen u. s. w. Methode. In Wahrheit ist aber die Methode nicht nur jenes Subjektive, sondern auch etwas Objektives: sie ist der sich selbst zum Gegenstande habende Begriff *), die Natur der Sache, die Art und Weise oder vielmehr die Substantialität der Dinge **). Diese Einsicht, daß die wahrhafte Methode ihre subjektive nnd objektive Seite in vollkommenster Uebereinstimmung hat, ward mir aber erst später, als ich meine Aufgabe, die ich anfänglich für unausführbar hielt, gelöst hatte. Das Kind, sagte ich mir, der Elementarschüler mag sich einer Wissenschaft gegenüber egoistisch verhalten — Kinder sind überhaupt Egoisten, weil Naturmenschen —, im elementarischen Unterrichte ist das lernende Subjekt das Herrschende, das Objekt ist rechtlos und hat keinen andern Werth als den, ein Geistbildendes zu sein; der ausgebildete Gelehrte, dachte ich weiter, mag sich in sein Objekt versenken und darin verlieren: im wissenschaftlichen Unterricht muß ein Mittelweg gesucht werden. Weder darf das nicht nur nach Kenntnissen, sondern nach Bildung strebende lernende Individuum seine Forderungen aufgeben, noch darf die Wissenschaft sich gefallen lassen, nach einer Methode vorgetragen zu werden, die ihr nicht adäquat ist. Welche Mühe es mir gekostet, um diesem gemeinten Zwiespalt zu entgehen, um über den Abgrund zwischen Subjekt und Objekt eine vermittelnde Brücke zu schlagen, das zu erzählen hat kein allgemeines Interesse. Ich schaffte eine Menge mathematischer Lehrbücher und Systeme an, alle waren in der euklideischen, dogmatischen Weise gearbeitet ***); berühmt gewordene Aussprüche berühmter Mathematiker, z. B. das bekannte Wort von Kästner, vermehrten meinen Respekt vor Euklid's Methode, und lange hielt

---

*) Hegel.

**) Was Spinoza in anderem Sinne und Zusammenhange behauptet: Ordo et connexio idearum idem est, ac ordo et connexio rerum, das kann als absolute Forderung an die Methode gelten.

***) Das gilt auch von Ohm's berühmtem Werke: „Konsequentes System der Mathematik." Wie wenig Aehnlichkeit dieses Heft auch mit den ihm entsprechenden Kapiteln in Ohm's Lehrbüchern zeigen möge, so wird es doch dem Kenner nicht entgehen, daß der „Versuch eines konsequenten Systems" auf diese Darstellung von großem Einflusse gewesen ist.

ich den Gedanken für eine Vermessenheit, es könne vielleicht der mathematische Inhalt mit seiner herkömmlichen Form nicht durch innere Nothwendigkeit, durch die Natur der Sache verbunden, sondern eins vom andern unabhängig sein; es lasse sich für diesen Inhalt vielleicht eine Form finden, welche der Natur des Inhalts eben so angemessen, dagegen den Bedürfnissen des lernenden Subjekts viel angemessener sein dürfte*). Erst als ich mich an die-

---

*) Ich erlaube mir, aus einer kleinen Schrift, die mir in jener Zeit zukam (Gegenwärtiger Standpunkt des mathematischen Unterrichts an gelehrten Schulen. Von Bayer. Aachen 1832.) eine Stelle zu citiren. Sie steht S. 39 — 41.

„Die Schüler müssen, unter Anleitung des Lehrers, selbst erfinden, weniger lernend, als vielmehr selbstlehrend, die Wahrheiten auffassen, und die Sätze von derjenigen Seite ergreifen lernen, von welcher sie sich am einfachsten von anderen ableiten lassen. Der fleißige und emsige Lehrer, welcher sich sein Amt angelegen sein läßt, wird die Sätze möglichst verschieden zu erörtern suchen, bald von der Thesis ausgehend zur Hypothese, bald umgekehrt von dieser zu jener übergehen; er wird seine Schüler an die eigene Darstellung des Geistes und die selbstthätige Auseinandersetzung der Hauptgesichtspunkte gewöhnen, worauf ein Beweis beruht; er wird ihnen oft den eigentlichen Lehrsatz verschweigen, durch Fragen und Aufgaben endlich zu ihm gelangen, und ihn dann vom Schüler selbst aussprechen lassen: er wird gewandt und sorgfältig den gehörigen Mittelweg zu beobachten suchen, ohne der Strenge und Gründlichkeit der Beweise etwas zu vergeben, und auf diesem heuristischen Wege seinen Unterricht mit den herrlichsten Erfolgen krönen.“

„Statt dieser, freilich schwierigen und mühsamen Lehrmethode, welche den Lehrer in vollem Maße in Anspruch nimmt, stets heitern Geist und Lebendigkeit fordert, findet man nicht allein in Lehrbüchern, sondern auch meistens beim mündlichen Vortrage das Gegentheil. Oft herrscht in der Darstellung der einzelnen Sätze nicht allein große Willkür, sondern auch Unbestimmtheit. Man spricht z. B. den Lehrsatz aus, zeigt aber dem Schüler nicht, wie er selst dazu kommen könnte, wie jener mit dem Wesen der Wissenschaft, oder auch nur mit einem andern Satze zusammenhängt; man zieht etwa diese oder jene Hülfslinie, ohne den Schüler auf den Grund und die Ursache derselben aufmerksam, und ohne ihm begreiflich zu machen, warum gerade diese und keine andere gezogen wird; man führt einige frühere Sätze an, macht aber dem Schüler nicht begreiflich, warum gerade diese Sätze zu Hülfe genommen werden, und unterläßt es ganz, die ausgesprochene Wahrheit auch durch Anziehung von anderen Sätzen zu begründen; man ist froh, den Beweis geliefert zu haben, und geht einsylbig zu einem andern Satze über, ohne jenen weiter versinnlicht und bei dem Schüler erforscht zu haben, ob und wie weit er denselben verstanden hat, und ohne den neuen Satz hinreichend vorbereitet zu haben.“

„Auf solchem synthetischen Wege erkräftigt man wol die aufgestellte Wahrheit, aber der größere Theil der Schüler schwebt im Dunkeln und weiß nicht, wie ihm geschehen ist; denn er ist sich keines Grundes bewußt, warum der Lehrer gerade diesen Weg eingeschlagen und nicht gezeigt hat, wie der Schüler selbst entweder auf demselben, oder auf anderm Wege, oder rückwärts, zum Ziele kommen kann: er mußte dem Lehrer gleichsam blind folgen, und gelangte durch den in den meisten Beziehungen für ihn dunkeln, oft sehr mannichfach gewundenen Gang des Beweises allerdings an die gesuchte Stelle; aber es ist ihm, als wäre sein Geist umnebelt und er würde blos genöthigt, die an und für sich wohl bündigen Schlüsse und die dargethane Wahrheit anzuerkennen.“

sen Gedanken gewöhnt hatte, ging mir ein Lichtschimmer auf, und ich hielt es für möglich, eine Methode zu finden, die sich weder an der heiligen Wissenschaft noch an der eben so heiligen Intelligenz des Schülers zu versündigen hätte. Endlich fand ich, was ich suchte. Der ganze Zwiespalt war nur ein gemeinter gewesen; die dem Gegenstande immanente Methode war auch diejenige, welche dem Lernenden sein Recht läßt; denn es war diejenige, welche Hegel oben analytisch nennt und die ich hier objektiv die genetische, subjektiv die heuristische nennen will.

Ich habe mich im Hefte der Ausdrücke analytisch und synthetisch bedient, und es ist mir leid darum. Wir wissen Alle, was in der Philosophie analytisch und synthetisch zu nennen ist; ich habe auch Jahre lang zu wissen geglaubt, was in der Mathematik so zu heißen habe: jetzt weiß ich's nicht mehr. Noch gestern Abend hab' ich, ich weiß nicht zum wievielsten Male, mit Herrn Direktor Diesterweg über den Begriff der beiden Methoden gesprochen; wir sprachen uns müde, kamen aber so wenig wie früher zu einem Resultate. Oeftere Unterhaltungen mit Ma-

---

„Vielleicht auch hat es der Lehrer so weit gebracht, daß der Schüler staunt, die Wahrheit selbst nicht leugnen kann, sondern anerkennen muß; allein dem Letztern ist oft zu Muthe, als wäre ihm etwas angethan; er ist sich der ganzen Sache nicht bewußt; sie ist nicht sein Eigenthum: er kam nicht durch eigenes Urtheil, nicht selbsterfindend, zur Ueberzeugung; er wird eben deswegen die Wahrheit nur mit dem Gedächtnisse, nicht aber mit dem Verstande aufgefaßt haben; er wird sie nur in jenem aufbewahren, um sie recht bald wieder zu vergessen."

Den „Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Größenlehre" und die dazu gehörigen „Erläuterungen" von dem kürzlich verstorbenen Konsistorialrath und Gymnasialdirektor Dr. Matthias in Magdeburg kenne ich erst seit wenigen Tagen. Es sei mir gestattet, eine Stelle aus der sehr lesenswerthen Vorrede auszuziehen.

„Unsere mathematischen Lehrbücher geben — ohne der verdienten Achtung gegen ihre Verfasser durch diese Bemerkung zu nahe zu treten — dem Schüler vollständig, was er, von dem Lehrer geleitet, mehr selber finden sollte; veranlassen und nöthigen ihn also zu wenig für die Entwickelung und Uebung seiner Kräfte, diese regsam zu äußern und ihrer mächtig zu werden; der Lehrer kann, dem im Lehrbuche bereits Ausgeführten Schluß für Schluß folgend, seinen Unterricht nur darauf berechnen, daß er von dem Schüler verstanden werde; er kann ihn nicht zum Selbsterfinden und zum Vortrage des Selbstgefundenen ohne Hinderniß anleiten, weil der Schüler sich immer auf das Lehrbuch dabei verlassen wird. Daher die Erfahrung, daß nach einem Lehrbuche von dieser Form unterrichtete Jünglinge zwar gründliche mathematische Kenntnisse, an und für sich von großem Werthe allerdings, einsammeln, selten aber doch den eigentlichen Geist der Wissenschaft empfangen, und diejenige Gewandtheit im Denken sich aneignen, welche in den Stand setzt, aus sich selbst Kenntnisse zu erzeugen....."

Ich habe unten Gelegenheit zu sagen, in welchem Sinne der Leitfaden von Matthias heuristisch zu nennen ist.

thematikern von Profession, denen ich die Aushängebogen dieses Heftes mitgetheilt, sind eben so fruchtlos gewesen; was der Eine analytisch nennt, heißt dem Andern synthetisch; die Philosophen können es den Mathematikern zurückgeben, wenn diese sich noch über Verwirrung der philosophischen Terminologie beschweren wollen. Ich habe kein Recht, auf dem Gebiete der Mathematik die Bedeutung eines Terminus festzustellen, doch will es mir scheinen, als löse sich die ganze Verwirrung, sobald man darauf reflektirt, daß die Analysis der Griechen etwas Anderes ist als die neuere Analysis, der Kalkül. Wenn ich in den §§ das Wort analytisch gebraucht, so habe ich es immer in dem modernen Sinne verstanden, so wie es auch Hegel in der oben citirten Stelle nimmt*).

Eine analytische Methode in dem Sinne, wie in der Philosophie davon die Rede ist, ist in der Mathematik unmöglich. Jedes mathematische System wird von den einfachsten Begriffen ausgehen und sich dadurch aufbauen, daß es Bekanntes kombinirt und daraus Schlüsse herleitet, die auf neue Wahrheiten führen. Insoweit ist alle Mathematik synthetisch, ja die Griechen nannten dieses Verfahren eben Synthesis. Irre ich nicht gar zu gröblich, so thue ich im Grunde ganz dasselbe, was Euklid gethan, aber nicht geschrieben hat.

Wenn man mich nun fragt, was ich denn an Euklid auszustellen habe, so antworte ich: An dem Mathematiker Euklid natürlich gar nichts, an dem Schriftsteller Euklid die Kleinigkeit, daß er uns nicht Alles aufgeschrieben hat, was er hat thun müssen; an dem Lehrer Euklid aber — wenn man von einem so vorzüglichen Manne annehmen darf, er habe nach seinem Buche, so wie es ist, unterrichtet **) —, daß ein solcher Unterricht nicht der rechte ist.

---

*) Während dieses geschrieben wird, kommt mir Herrn Dr. v. Sommer's eben erschienener „Grundriß der gesammten reinen Mathematik“ zu, dessen beachtenswerthe Vorrede sich ebenfalls über die Verwirrung im Gebrauche der Ausdrücke Analysis und Synthesis beschwert und das Verhältniß beider Begriffe aus einander zu setzen unternimmt.

**) Was ich stark bezweifle, denn nichts ist wahrscheinlicher, als daß die erfindende Methode, freilich ohne ihr schönstes Hülfsmittel, die algebraische Symbolik, bei den Alten allgemein im Unterrichte angewendet wurde; wenigstens spricht die berühmte Episode in Platon's Menon deutlich genug dafür, daß Sokrates die Geometrie heuristisch lehrte. Ob nun, als Euklid's Elemente einmal vorhanden waren, das spätere Alterthum die heuristische Methode allmälig vernachlässigt und dafür nach Euklid docirt hat, kann ich nicht sagen; hat man es gethan, so ist dies nur eins der vielen Zeichen vom Verfall der antiken Kultur. Wenn aber auch die neueren Lehrer der Mathematik ihr ganzes Lehren darauf beschränken, den Euklid und eine Arithmetik

Bekanntlich sagt Euklid am Anfange eines jeden seiner Sätze, was er beweisen will. Wenn A ist (Hypothesis), so ist B (Thesis). Dann folgt die Demonstration.

Aehnlich sagen die Verfasser mathematischer Lehrbücher: „Zwei Brüche werden mit einander multiplizirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$." Und dann folgt der Beweis.

Daß die Nachahmung der euklideischen Form auf dem Gebiete der Zahlenlehre eben eine unnütze Nachahmung und keinesweges von der Natur der Sache geboten ist, leuchtet unmittelbar ein. Muß man aber die euklideische Form in der Arithmetik objektiv unnütz nennen, so verdient sie subjektiv, wo sie auch immer angewendet werde, einen noch schlimmern Namen: sie ist unpädagogisch.

Was Euklid betrifft, so denke ich mir, daß zwischen je zwei seiner Sätze eine Reihe von Schlüssen liegt, welche ihn von dem Satze m zum Satze n geleitet haben. Diese Schlüsse, die Folgerungen aus m, theilt er aber seinem Leser nicht mit, sondern er hüpft in witziger Weise vom Satze m zum Satze n, oder, um ein anderes Bild zu gebrauchen, er gleicht einem Flusse, der sich, wenn er beim Punkte m angelangt ist, auf einmal unter der Erde verliert und erst beim Punkte n wieder sichtbar wird. Ist nun Euklid beim Satze n angelangt (wie Ich dahin komme, kümmert ihn nicht), so demonstrirt er mir allerdings, daß er Recht hat, hier zu stehen, ja man kann, wenn man der Demonstration eine andere Form gibt, sie gleichsam auf den Kopf stellt, jedesmal die Lücke zwischen Satz m und n ausfüllen. Was für Gründe Euklid gehabt haben kann, die Brücke von Schlußketten, auf welcher er von m nach n gelangt ist, gleich bei seiner Ankunft in n abzubrechen und mir zu verstecken, das braucht hier

---

im selben Schnitt ihren Schülern einzuprägen, so ist das, ohne alle Rücksicht auf das, was der Schüler fordern kann, eine Undankbarkeit gegen eine der bewunderungswürdigsten Entdeckungen der neuern Zeit, ich meine die symbolische Zeichensprache der Mathematik. Eine kürzere, bestimmtere und an Erfindungen reichere Symbolik wird vielleicht nie wieder erfunden werden; die meisten astronomischen, mechanischen, optischen, geometrischen Entdeckungen der letzten Jahrhunderte verdanken wir ihr fast allein, namentlich die Rechnung des Unendlichen hätte ohne sie nicht erfunden werden können. Ohne sie und den Gebrauch der Logarithmen würde die blos materielle Länge und Komplikation sehr vieler mathematischer Aufgaben ihre Lösung für menschliche Kräfte unmöglich machen; mit ihr bedarf es sehr oft nur, daß man eine Aufgabe hinschreibt, und die Auflösung kommt einem von selbst entgegen, ja meistens findet man mehr, als man gesucht hat.

nicht untersucht zu werden; dem Lernenden, der nicht blos Kenntnisse, sondern Bildung erwerben will, ist just an dieser Brücke Alles gelegen. Ständen aber die unterdrückten vermittelnden Schlüsse im Buche, so wird man hoffentlich nicht sagen können, dasselbe würde dadurch verunziert.

In der Ueberzeugung also, daß die äußere Form, welche Euklid seinen Sätzen gegeben und diese selbst von einander unabhängig sind, mithin eine andere Form dem Inhalte eben so angemessen sein kann; daß aber ferner das euklideische Verfahren der subjektiven Forderung an die Methode durchaus nicht genügt, befolgt die gegenwärtige Darstellung der Mathematik folgendes Verfahren:

Sobald ein Satz m gewußt wird, beginnt ein neuer §; in diesem § schließe ich weiter, ziehe progressiv Folgerungen aus m und beschließe den § mit dem Resultat meiner Schlüsse. Was Euklid der Beweis ist, das sind mir meine zum Resultat führenden Schlüsse; was bei ihm das Erste ist, die Thesis, das ist bei mir das Letzte: n erweist sich als Resultat von m.

Nach dieser Methode ist es der Schüler, der den Lehrsatz n findet, weil er den Weg von m nach n mit sehenden Augen wandelt; er empfängt nicht die fertige Wahrheit, sondern er hat sie hervorzubringen. Auf ihm ruht die Hauptthätigkeit, und der Mechanismus ist, wenn nicht unmöglich — denn wo wäre er das?! —, doch außerordentlich erschwert *). Die Fortschritte sind schnell, denn der Schüler arbeitet mit Lust, weil er täglich seinen Erwerb an Wahrheiten überschaut, und zwar solcher Wahrheiten, die er im Schweiß seines Angesichts auf seinem eigenen Acker gebaut hat. Die erworbenen Kenntnisse sind gründlich, weil ja jedes Einzelne jeden Augenblick wieder entwickelt werden kann, wenn es zufällig vergessen worden sein sollte.

Ob man diese Methode analytisch oder synthetisch nennt, ist jetzt einerlei; faute de mieux nenne ich sie genetisch, weil sie die Entstehung der mathematischen Wissenschaft darstellt; subjektiv betrachtet ist sie heuristisch.

Wenn ich nun im Hefte sehr oft, nachdem eine mathematische Wahrheit also gefunden, dieselbe Wahrheit als Behauptung hingestellt und nun regressiv (also analytisch in griechischem Sinne; ich habe es synthetisch genannt, v. Sommer nennt solches Beweisen am passendsten hypothetisch) Folgerungen aus dieser Be-

---

*) Das Heft ist darum nur ein Heft, kein Buch, damit der Schüler ganz außer Stande ist, die Absicht des heuristischen Unterrichts zu vereiteln.

hauptung gezogen habe, welche, wenn sie auf unmittelbar Einleuchtendes, z. B. a = a, führten, die Behauptung als richtig erwiesen, so ist dies im Interesse der Pädagogik, nicht der Wissenschaft, geschehen, für welche nach dem Progreß der Regreß eine leere Tautologie ist. Wie nöthig ich es nämlich auch glaube, daß der Schüler durchgängig den mathematischen Inhalt selbstthätig erfinde, also keine Lehrsätze, sondern Aufgaben erhalte (z. B.: Siehe zu, wie Quotienten zu multipliziren sind; — was wird das Verhältniß des Quadrats der Hypothenuse im Rwinkligen △ zu der Summe der Quadrate der beiden Katheten sein?), so glaube ich doch ebenfalls, daß von Zeit zu Zeit auch ein Lehrsatz gegeben und der Schüler angehalten werden muß, den **Beweis** zu liefern. Der Geist muß nach verschiedenen Richtungen hin gebildet werden: das Eine thun, das Andere nicht lassen *).

Bekanntlich wird für gewöhnlich im mathematischen Unterrichte nicht nur der fertige Lehrsatz, sondern auch der Beweis mitgetheilt, und der Schüler hat sich beides nur zu merken, was nicht selten dadurch geschieht, daß Lehrsatz und Beweis auswendig gelernt wird. Nun könnte mir Jemand sagen: Ich gebe den Lehrsatz, nie den Beweis; indem mein Schüler aber diesen selbstthätig finden muß, erfindet auch er, und somit erreiche ich dasselbe, was du mit der genetischen Methode erreichst **).

Hierauf gibt es allerlei zu erwiedern. Einmal möchten bei

---

*) Ich theile aus dem oben genannten „Grundriß" des Herrn v. Sommer eine Stelle mit (1. B. 1. Abth. S. 24.):

„Die erste Form des Beweises ist **der aus dem Begriff** des Gegenstandes, um welchen es sich handelt, geführte; er ist eigentlich der klarste und überzeugendste, weil man bei ihm die eigentlichen Gründe und Ursachen vor Augen hat; aus eben dem Grunde, weil er immer auf den ersten Anfang zurückgeht, ist er aber oftmals zu weitläufig." (Dieser Beweis wäre das, was ich § 38, § 53, § 83, § 98 u. s. w. angewandt und worauf ich in der Anmerkung 3. zu § 55 und in der Anmerkung zu § 68 aufmerksam gemacht habe. Im **elementarischen** Unterricht sind nur solche Beweise zulässig.) „Die zweite Form ist die **problematische**, weil man bei ihr das Resultat — die Behauptung — noch nicht zu wissen nöthig hat, sondern erst mittelst richtiger Schlüsse darauf geführt wird; es ist demnach diese Form sowohl zur Aufsuchung von Wahrheiten — Eigenschaften der Größen —, als zur Erlangung eigener Selbständigkeit im mathematischen Denken besonders geeignet." (Diese Form ist es, welche in diesem Hefte herrscht.) „Die dritte Form, der **hypothetische Beweis**, nimmt das zu Beweisende als bereits bewiesen an, und sucht dann durch richtige Schlüsse die Haltbarkeit oder Unhaltbarkeit der aufgestellten Behauptung darzuthun. Diese Form" (es ist die euklideische, und man findet sie in fast allen Lehrbüchern) „ist am wenigsten zur Erweckung des Selbstdenkens geeignet, weil sie uns nicht mit dem Gedankengange bekannt macht, der zur Behauptung oder Thesis führte; indessen ist in ihr gewöhnlich der Beweis auf dem kürzesten Wege zu vollführen."

) In **diesem Sinne hat **Matthias** seinen Leitfaden heuristisch genannt.

weitem nicht alle Schüler, nachdem der Lehrer ihnen einen fertigen Lehrsatz mitgetheilt, noch Lust haben, sich große Mühe um Auffindung des Beweises zu geben. Es könnte Einer etwa denken: Also $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; gut, das will ich mir merken; was aber den Beweis betrifft, so glaube ich dem Lehrer aufs Wort. Es gibt nun allerdings in jeder Schule hinreichende Mittel, wodurch das Lautwerden eines so bedenklichen Raisonnements verhindert werden kann; aber ich frage: wozu will man muthwillig das Interesse an der Sache vernichten, wenn es durch ein einfaches Mittel erhalten und bis auf einen unglaublich hohen Grad dadurch gesteigert werden kann, daß man keine Sätze gibt, sondern sie finden oder, richtiger gesagt, machen läßt? Was aber die regressive Methode Gutes und Bildendes hat, geht, wie schon oben gesagt, bei der progressiven Methode keinesweges verloren, indem man eben Beides thut und die Schüler erst im Erfinden, dann im Begründen übt.

Was aber hauptsächlich für die heuristisch-genetische Methode spricht, ist dieses: Nach ihr ist der Schüler ein Sehender, der nicht nur weiß, woher er kommt und wo er steht, sondern auch, w o h i n e r g e h t, während der nach Euklid unterrichtete Zögling alle fünf Minuten eine Binde vor die Augen bekommt, in einem verschlossenen Wagen (er weiß nicht, wie ihm geschieht) eine Station weiter gefahren wird (nämlich vom Satze m zum Satze n) und dann im besten Falle zur Aufgabe erhält, den Weg nach der letzten Station zurück zu suchen. Gesetzt nun, er erlangt eine ausgezeichnete Fertigkeit darin und lernt auch alle Stationen, auf denen er sich successive aufgehalten, gut kennen, so ist doch sein ganzes Reisen am Ende, sobald ihn der Lehrer im Stiche läßt und ihn nicht mehr auf eine neue Station bringt. Er hat eben das Reisen selbst nicht gelernt, weil er immer mit verbundenen Augen und gleich dem fabelhaften Vogel Merops, dem Ziele den Rücken zugewandt, weitergeschafft worden ist. Wogegen der nach der genetischen Methode Unterrichtete vom Lehrer das P r i n z i p d e s F o r t s c h r i t t s bekommt. Dem heuristischen Schüler sagt der Lehrer weder Sätze vor, noch hat er nöthig ihm zu sagen, welche Aufgabe nun zu lösen ist. Der Schüler weiß das selber.

Das Prinzip der Mathematik nämlich wird auch das Prinzip ihrer Methode sein, wenigstens der genetischen. Das Element der Mathematik ist nun das todte atome Eins und die nicht lebendigere Zahl. Will man Eins und Zahl Begriffe nennen, so habe ich nichts dagegen, wenn man nur nicht vergißt, daß es

leb- und seelenlose, ganz formelle Begriffe sind, Begriffe, in denen alles Leben ausgetilgt ist und die sich zu dem „Begriff" der Philosophie verhalten wie Anthropolithen zu lebenden Menschen. Was aber ohne Leben, das ist auch ohne Bewegung, die Bewegung muß äußerlich an es kommen. Obgleich es nun hienach den Anschein haben könnte, gleichgültig zu sein, was denn in der Mathematik für eine Ordnung und Folge herrscht (wie denn auch bekanntlich die meisten Sätze in unbestimmt vielen Reihefolgen zu entwickeln oder zu erweisen sind), so existirt doch nicht nur ein fortleitendes, sondern auch ein anordnendes Prinzip. Das fortleitende Prinzip ist, wie Hegel es oben in der ausgezogenen Stelle nennt, die analytische Identität; das Heft zeigt, wie die Multiplikation aus der Addition ($a + a + a + \ldots\ldots + a_m = am$), die Potenz aus der Multiplikation hervorgeht ($a . a . a \times \ldots\ldots \times a_m = a^m$), und wie jede der drei positiven Operationen wieder ihren doppelten Gegensatz hat. Das anordnende Prinzip aber kann, eben weil der mathematische Inhalt todt, d. h. abstrakt ist (sobald man das Eins und das Viele u. s. w. lebendig werden läßt, steht man in der Metaphysik), nur die Kombination sein, durch welche, wenn z. B. die Begriffe Zahl, Gleichung, Ungleichung, Summe und Multiplikation bekannt sind, die Aufgaben:

Zahl mal Zahl; Gleichung mal Zahl; Zahl mal Ungleichung; Ungleichung mal Zahl, Zahl mal Ungleichung, Ungleichung mal Ungleichung; Zahl mal Summe, Summe mal Zah,l Summe mal Summe; Summe addirt zu Summe, u. s. w.

entstehen. Die Durchsicht des Heftes wird zeigen, wie es für den Schüler möglich ist, nicht nur jede mathematische Wahrheit zu erfinden, sondern auch immer zu wissen, was denn eben jetzt zu erfinden ist.

Auf verfängliche Fragen, wie ich, der in der Kategorie der Quantität nur zuweilen einkehrt, dagegen seine feste Wohnung in Kategorien mit reicherem und konkreterem Inhalte aufgeschlagen hat, dazu komme, nicht nur die alte geheiligte Methode anzufechten und den ehrwürdigen Kästner auf den Kopf zu stellen, sondern auch sogar an die eben so heilige hergebrachte Anordnung der mathematischen Materien die frevelnde profane Hand zu legen, auf solche Fragen kann ich nach allem Vorhergehenden wol die Antwort sparen. Wenn man mir aber den Vorwurf macht, daß ich im Hefte das kombinatorische Prinzip angewendet, ohne eine Theorie der Kombinatorik vorangehen zu lassen, so weiß ich hierauf in der That nichts Anderes zu erwiedern, als daß diesem Mangel leicht abzuhelfen ist. Ich bin zufrieden, wenn man nur

die drei Prinzipien, worauf diese Darstellung der Mathematik ruht, gelten läßt, wenn Pädagogen *) und Mathematiker zugeben, daß dieses Heft, weil es heuristisch, einen geistbildenden Unterricht erleichtert, weil es genetisch und kombinatorisch, die in ihm versuchte Darstellung der Mathematik der Natur der Wissenschaft angemessen ist. Eigentlich fallen die drei Prinzipien in eins zusammen; es findet bei ihnen ein Verhältniß statt wie in der Philosophie. Das Hervorgehen der unterschiedenen Stufen im Fortschreiten des Gedankens kann nämlich mit dem Bewußtsein der Nothwendigkeit, nach der sich jede folgende ableitet, und nach der nur diese Bestimmung und Gestalt hervortreten kann; — oder es kann ohne dies Bewußtsein, nach Weise eines natürlichen, zufällig scheinenden Hervorgehens geschehen, so daß innerlich zwar der Begriff nach seiner Konsequenz wirkt, aber diese Konsequenz nicht ausgedrückt ist. Die Eine Weise dieses Hervorgehens, die Ableitung der Gestaltungen, die gedachte, erkannte Nothwendigkeit der Bestimmungen darzustellen, ist die Aufgabe und das Geschäft der Philosophie selbst, und zwar zunächst der logischen Philosophie. Die andere Weise aber, daß die unterschiedenen Stufen und Entwickelungsmomente in der Zeit, in der Weise des Geschehens, an diesen besonderen Orten, unter diesem und jenem Volke, durch dieses oder jenes Individuum, kurz unter dieser empirischen Form hervortreten, dies ist das Schauspiel, welches uns die Geschichte der Philosophie zeigt. Nach dieser Idee behauptet Hegel nun **), daß die Aufeinanderfolge der philosophischen Systeme in der Geschichte dieselbe ist, als die Aufeinanderfolge in der logischen Ableitung der Begriffsbestimmungen der Idee, und umgekehrt, daß man in dem logischen Fortgang für sich genommen den Fortgang der geschichtlichen Erscheinung nach seinen Hauptmomenten hat. Ich darf nun nicht erst sagen, daß eine Vergleichung der Mathematik mit der Philosophie nicht urgirt werden darf; es ist aber leicht einzusehen, daß der Gang der Erfindung der mathematischen Wahrheiten und die wissenschaftliche Exposition derselben einen gewissen Parallelismus zeigen. Wie man aber, um Hegel's Ansicht von der Uebereinstimmung der Geschichte der Philosophie und des Systems der Logik wahr zu

---

*) Nur bitte ich, die Anmerkung III. zu § 55 und die Anmerkung zu § 68 nicht zu übersehen. Meine Bücher sollen auf denkende Leser nicht wie eine Injurie wirken, darum habe ich an die Nothwendigkeit der raisonnirenden Auflösungen und Beweise nur erinnert und die Ausführung dem Lehrer überlassen.

**) Geschichte der Philosophie. Werke XIII. 42 — 43.

finden, fähig sein muß, die reinen Begriffe in dem zu erkennen, was die geschichtliche Gestalt enthält, so muß man auch in der Mathematik aus der Geschichte der Erfindung der Wissenschaft nur das Wesentliche im Auge haben, alsdann fällt die heuristische Methode mit der genetischen zusammen. Im Unterrichte soll der Schüler das, wozu die Wissenschaft dreitausend Jahre gebraucht hat, in kurzer Zeit durchleben, er soll es aber nicht als fertiges Resultat empfangen, sondern entdecken. Des Lehrers Sache ist es nun, diese Entdeckungsreise so zu dirigiren, daß der Schüler nicht nach Zufall, sondern nach einem Prinzip (die Kombination), und zwar auf dem leichtesten und kürzesten Wege, zu jeder mathematischen Wahrheit gelangt.

Der Wunsch, auch den mit mathematischen Dingen weniger vertrauten Lehrern verständlich zu sein, hat diese Auseinandersetzungen über die Methode etwas weitläufig werden lassen, was mir diejenigen Leser, qui entendent à demi-mot, verzeihen mögen. Trotz dem darf ich wol kaum hoffen, Alle überzeugt zu haben. Dagegen würde mich nichts auf der Welt angenehmer überraschen, als wenn mir von allen Seiten zugerufen würde, daß die heuristisch-genetische Methode längst in Anwendung und überhaupt nichts Neues sei. Desto besser, für Euch und Eure Schüler! In diesem Falle muß sich mein Büchlein schon mit den Lesern begnügen, die sich in derselben Lage befinden, worin ich mich vor fünf Jahren befand. Es sind ihrer nicht Wenige, ich versichere Euch.

Da dieses Heft nur die sieben Operationen, und zwar unter der Bedingung, daß mit wirklichen Zahlen operirt werde, enthält, und mancher Lehrer die positiven und negativen Zahlen u. s. w. vermissen möchte, weil er gewohnt ist, sie in den Lehrbüchern auf den ersten Seiten erwähnt zu finden, so muß ich mich in der Kürze über die Eintheilung erklären, welche ich der Mathematik in dieser Darstellung, ihre Fortsetzung und Vollendung vorausgesetzt, geben würde *).

---

*) Wann die Forsetzung erscheinen wird, kann ich nicht bestimmen; man muß auf mathematische und philosophische Arbeiten, besonders wenn eine extreme Kürze angestrebt wird, so viel Zeit und Mühe verwenden, daß es einer äußerlichen Nöthigung bedarf, um dergleichen zu schreiben. Daß ich dieses erste Kapitel der mathematischen Wissenschaft im Dezemberhefte 1836 von Diesterweg's Rheinischen Blättern mittheilte, und es jetzt, weil beim Verleger des Journals eingelaufene Bestellungen uneffektuirt bleiben mußten, in einer sehr verbesserten Gestalt wieder abdrucken lasse, hat in dem Wunsche seinen Grund, die Lehrer der Mathematik an Gymnasien und Bürgerschulen, besonders aber auch die Hauslehrer, für die heuristische Methode zu gewinnen. Bleibt dieser Wunsch nur ein frommer, so ist ein zweites Heft unnöthig, wird der Zweck erreicht, so setze ich voraus, daß jeder Lehrer die Fortsetzung schreiben kann.

Die höhere Analysis und Geometrie gehört wol nicht ins Gymnasium; die sogenannte Elementarmathematik wird nun bekanntlich seit Ohm in Zahlenlehre, Allgemeine Größenlehre und Besondere Größenlehre, wohin die Geometrie gehört, eingetheilt. Die allgemeine Zahlenlehre, näher die Analysis des Endlichen, würde ich nun in drei Abtheilungen zerfallen lassen: Theorie der identischen (analytischen) Gleichungen (Buchstabenrechnung); Theorie der algebraischen Gleichungen (die vier ersten Grade; konstante Zahlen: Algebra); Theorie der Zahlen. Die Theorie der identischen (analytischen) Gleichungen hat nun zwei Kapitel: Das erste macht den Inhalt des Heftes aus; das zweite gibt die Theorie der Operationen mit Zahlformen *). Wenn man Zahlen und Zahlformen bunt durch einander abhandelt, ist ein wissenschaftliches Erkennen unmöglich; das macchiavellistische Divide et impera mag in der Politik in gerechtem Verrufe stehen; auf dem Gebiete der Wissenschaft kann man nicht zu subtil verfahren.

Man wird mich fragen, wie es denn meiner Ansicht nach mit der Geometrie gehalten werden soll und was für ein Verhältniß die heuristisch-genetische Methode zu diesem Theile der mathematischen Wissenschaft hat. Hierauf müssen, glaub' ich, zwei Antworten gegeben werden. Man kann nämlich die Geometrie entweder auf Konstruktion oder auf den Kalkül basiren. Geschieht das letztere, so erscheint sie als eine reine Anwendung der Analysis auf Raumgrößen, in welcher das Fortschreiten nicht sowohl monstrirt, als durch die Rechnung verhüllt und nur in den Resultaten ausgedeutet wird **). Bis jetzt hat man dieses Ver-

---

*) Das zweite Kapitel ist eine Generalisation des ersten, so daß es in ihm gleichgültig wird, ob den Summen-, Produkten-, Potenzen-, Differenzen-, Quotienten-, Wurzel- und Logarithmenformen, womit operirt wird, auch wirkliche Zahlen entsprechen.

Hier wird o als bequemeres Zeichen der Differenz $m - m$, $n - n$ erklärt.

$+ m$ ist Summenform, für $o + m$ stehend.

$- m$ ist Differenzform, für $o - m$ stehend.

Folglich nach bekannten Sätzen des ersten Kapitels: $m + (- n) = m + (o - n) = m - n + o = m - n$. Oder $a . (- m) = a . (o - m) = a . o - a . m = o - am = - am$. Oder $m^{-n} = m^{o-n} = \left[m^o = m^{a-a} = \frac{m^a}{m^a} = 1. \right] \frac{1}{m^n}$; u. s. w.

**) Die analytische Geometrie bemüht sich zuvörderst, eine Verknüpfung zwischen dem Bekannten und Unbekannten, d. h. eine algebraische Gleichung aufzusuchen. Sobald diese gefunden, wird sie nach den allgemeinen Regeln der Algebra umgeformt, und obgleich nun jede dieser Formen gleichfalls wieder eine geometrische Bedeutung haben muß, so wird doch diese Bedeutung nicht zur Anschauung gebracht und nur das

fahren nur auf die höhere Geometrie angewandt und so von einer analytischen Geometrie gesprochen; es ist indeß mehr als wahrscheinlich, wenn auch manche Mathematiker vor der Hand es leugnen sollten, daß sich auch die Elemente so behandeln lassen. Nun ist klar, daß bei dieser Methode von geometrischem Unterricht erst dann die Rede sein könnte, wenn ein bedeutender Theil der Analysis absolvirt wäre; eben so klar ist aber, daß der große Vortheil, den man subjektiv von dem Studium der Geometrie erwartet, bei dieser Weise nicht erreicht werden kann. Die Geometrie wird demnach einer doppelten Fassung bedürfen, zuerst der konstruirenden *), dann der kalkulativen oder analytischen. Wie bewunderungswürdig nun aber auch die Elemente des Euklid sind, wie trefflich andere neuere Darstellungen der Geometrie genannt werden können — ich erinnere nur an das elegante Lehrbuch meines ehemaligen Lehrers, des Prof. Brewer in Düsseldorf —, so dünkt mich doch, daß der von mir in der Zahlenlehre versuchte heuristisch-genetische Weg auch hier eingeschlagen werden muß. Wie schon oben gesagt, läßt sich damit aller formelle Nutzen, den das Suchen des Beweises nach gegebenem Lehrsatze gewähren kann, füglich verbinden.

Lehrer, welche nach Lesung dieser Erörterungen über das Prinzip der Methode noch eine praktische Anweisung zum Gebrauche dieses Leitfadens erwarten und einer solchen bedürfen möchten, werden wol am besten thun, dieses Heft überhaupt nicht zu gebrauchen, sondern sich an dicke Lehrbücher in drei Bänden zu halten, die man ablesen kann. Ich gebe schon aus dem Grunde eine solche praktische Anweisung nicht, weil sie das Gebiet der Methode überschreiten und in das übergreifen müßte, was ich Manier nennen möchte. Die Methode ist ein Allgemeines, man darf von einer Methode prädiziren, daß sie besser als andere, daß sie die wahre ist. Wenn aber zwei Lehrer dieselbe

---

Endresultat aus der Sprache der Algebra in die geometrischen Raumverhältnisse gleichsam übersetzt.

*) Man kann sich nicht genug darüber freuen, daß in neuerer Zeit wieder daran gearbeitet wird, auch die höhere Geometrie von dem Kalkül ganz unabhängig zu machen. Möchte es nur Steiner (der schon im ersten Theile seiner „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten“ Resultate geliefert hat, welche dem Kalkül bisher kaum zugänglich waren) gelingen, die ganze höhere Geometrie auf eigene Füße zu stellen! Eben so wünschenswerth ist es aber, daß andere Mathematiker den Versuch machen, die ganze Geometrie, die niedere wie die höhere, als einen Spezialfall der Analysis zu behandeln und sie unter die Botmäßigkeit des Kalküls zu bringen. Nur scheint es nicht gerathen, beide Methoden zu vermengen.

Methode haben, so ist ihre Manier vielleicht sehr verschieden und jede unter gegebenen Umständen die bessere. Eine von mir geschriebene praktische Anweisung könnte nur meine Manier zeigen, ja nicht einmal die, weil verschiedene Individualität der Schüler eine verschiedene Manier bedingt. Lehrern aber ein Exercir-Reglement vorschlagen zu wollen, ist eine Albernheit, deren ich mich nicht schuldig machen will. In necessariis unitas, in dubiis libertas, sagt S. Augustinus; der fromme Mann fügt hinzu: in omnibus caritas.

Dagegen sei es mir vergönnt, über den oben erwähnten Unterricht nach der elementarischen Methode, weil ich ihn als Vorbereitung auf den wissenschaftlichen Unterricht voraussetze, noch einige Worte zu sagen. Wäre dieses Heft bestimmt, vorzugsweise in die Hände der Elementarlehrer zu kommen, so könnte ich diesen Gegenstand unberührt lassen; die besseren unter ihnen wissen durch den Unterricht oder durch die Schriften von Diesterweg, Harnisch, Graßmann, Scholz, Lehmann, Kawerau, v. Türk, Lindner u. s. w. so gut um die Methode Bescheid, daß es eine wahre Erquickung ist, z. B. einen ehemaligen Schüler von Diesterweg in einer rheinländischen Dorfschule unterrichten zu sehen. Die mit dem Rechenunterricht an gelehrten und Bürgerschulen beauftragten studirten Lehrer leisten wahrscheinlich noch viel mehr, als die Zöglinge der Seminarien. Das Folgende mag denn nur für diejenigen Hauslehrer geschrieben sein, welche zugleich elementarischen und wissenschaftlichen Unterricht zu geben haben und über die Methode noch nicht im Klaren sind.

Obgleich es mit Recht heißt: Veritas index sui et falsi est, so ist es doch vielleicht von Nutzen, wenn man zuerst sagt, wie der elementarische Unterricht nicht gegeben werden muß.

Die schlechte Methode, der Mechanismus oder Schlendrian *), dreht die Natur der Sache um, und anstatt von der Zahl zur Ziffer, d. h. von dem Bezeichneten zum Zeichen überzugehen, geht sie von der Ziffer aus und unterscheidet ein Kopf- und Zifferrech-

*) „Der Schlendrianismus ist das geist- und gedankenlose Fortwandern auf gebahnten Pfaden, dumm und stumm. Der Mechanismus ist das System der Bewegung, dessen Kraft außerhalb der Bewegung selbst liegt. Mechanisches Rechnen ist also dies, wenn man ohne Einsicht und Bewußtsein nach unverstandenen vorgeschriebenen Regeln verfährt. Jeder, der dies treibt, ist also eine Maschine, wie eine Uhr, eine Dampfmaschine und andere Maschinen. Ein Kind zum bewußtlosen Rechnen, zum Spiel mit todten Ziffern abrichten, heißt es entmenschlichen, seinen Geist fesseln oder tödten. Es ist ein intellektueller Todschlag." Dr. Diesterweg. (Wegweiser zur Bildung für Lehrer.)

nen, wobei es sich von selbst versteht, daß letzteres ihr das eigentliche und wahre Rechnen ist. Anstatt ferner, da alles Rechnen Bildung einer neuen Zahl aus bekannten ist, das Suchen dieser Gleichung, und zwar zuerst ohne und dann mit Ziffern, von dem Schüler selbstthätig vornehmen und jedes Zahlengesetz aus seinen Elementen erzeugen und durch des Lehrlings eigene Kraft gewinnen zu lassen, thut diese Methode das Gegentheil *), und zwar stehen ihr hier, je nachdem der Lehrer ein „Unstudirter" oder „Studirter" ist, zwei Wege offen. Ist der Lehrer jenes, so gibt er eine Regel, erläutert sie durch Beispiele quantum satis, und läßt den Schüler nun so lange bei Exempeln sitzen, bis das Fingermanöver fix von der Stelle geht. Ist der Lehrer aber ein Gelehrter, so stellt er ebenfalls die Regel auf, demonstrirt sie indeß hintendrein (wendet also die euklideische Weise des wissenschaftlichen Unterrichts auch bei Kindern an), wobei nun dem Zufall anheim gestellt bleibt, ob der Schüler die Einsicht in den Grund seines Verfahrens gewinnt, da die Fertigkeit im Rechnen ja ohne diese Einsicht gewonnen werden kann, und der Reiz, diese Einsicht mühsam zu erwerben, durch die Darreichung der fertigen Regel vom Lehrer selbst vernichtet worden ist.

Wie verfährt nun die gute Methode? Sie thut eben das Gegentheil. Sie gibt nicht, läßt nicht einlernen, sondern der Schüler hat sich selbst zu unterrichten, auf daß alle Resultate sein geistiges Eigenthum seien. Man ist nur weise von eigener Weisheit, sagt Montagne **). Es soll demnach alles zu Lernende in dem Schüler durch die Anschauung an konkreten Einzelfällen zuvörderst eine Gestalt gewinnen, damit er die angeschauten Einzelheiten demnächst durch Abstraktion zur Allgemeinheit erheben könne. Bevor Jemand das Ein mal Eins auswendig lernen und sich seiner für die Multiplikation bedienen darf, hat er erst mit seinen leiblichen Augen nachzusehen, daß 8, 7mal genommen, wirklich 56 gibt. Ehe Jemand den Satz $a + b = b + a$, oder $ab = ba$ auf dem Wege des Schließens (im wissenschaftlichen Un-

---

*) Nach der mechanischen Methode bekommen die beginnenden Rechenschüler, als Mittel, einheimisch in der Rechenkunst zu werden, alle Regeln, welche nach und nach unter den verschiedensten Bedingungen und von verschiedenen Männern durch Selbstversuche, als Gewinn tiefgehender Arbeiten, seit mehr denn zwei Jahrtausenden sind erworben worden. Dr. Lindner (Vorrede zu Tillich).

**) Oder doch ungefähr so: Quand bien nous pourrions estre sçavants du sçavoir d'aultruy, au moins sages ne pouvons nous estre que de nostre propre sagesse.

terrichte) einsehen lernt, muß er hundertmal die Erfahrung gemacht haben (im elementarischen Unterricht), daß 7 Rechenpfennige, 8mal genommen, gerade so viel geben, als 8 Rechenpfennige, wenn man sie 7mal nimmt. Nur so, auf lebendiger Anschauung beruhend, sollen die allgemeinen Sätze selbstgebildet, so können sie alsdann dem Gedächtniß überliefert und durch praktisches Rechnen eingeübt werden. Bei der mechanischen Methode wird nach unbegriffenen Regeln operirt. Hier ist alles Gewonnene durch die Kraft des Schülers, nicht des Lehrers gewonnen, welcher sich, wie Hegel in Bezug auf seine Methode zu sagen pflegte, blos das Zusehen behält und höchstens, mit Sokrates zu reden, Hebammendienste thut. Je mehr aber gewonnen wird, desto mehr Kraft hat sich im Schüler entwickelt; die formale Bildung steht im gleichen Verhältnisse mit den materialen Kenntnissen. Die Kraft aber, des Schülers eigenste Thätigkeit, nimmt die gute Methode in Anspruch, und ohne diese Thätigkeit soll der Schüler nichts lernen; er soll, was er erwirbt, mit Arbeit erwerben; umsonst hat er's nicht, und auch hier heißt es, daß wer hat, dem soll gegeben werden.

Der Schriften, woraus angehende Lehrer sich über den Rechenunterricht belehren können, gibt es viele. Diesterweg (einer der Thätigsten und Wirksamsten unter denen, welchen verdankt wird, daß das Rechnen immer mehr aufhört, ein bloßes Fingermanöver nach einem unverstandenen Zifferregulativ zu sein) verzeichnet sie in seinem „Wegweiser;" die besten sind aus der Volksschule hervorgegangen. Allerdings wird ein gelehrter Lehrer mit fast keinem dieser Bücher ganz zufrieden sein, er wird bedeutend abkürzen und zusammenziehen und überhaupt meinen, daß eine gewisse Strenge und Präcision, eine mehr mathematische Ansicht von der Mathematik auch im Unterricht kleiner Kinder nicht schaden könne. Denn, warum soll unten gelernt werden, was oben wieder vergessen werden muß?

Was die Eintheilung des Rechenunterrichts betrifft, so erlaube ich mir folgende vorzuschlagen.

Die erste Stufe gibt Anschauung der Zahlen und ihrer Entstehung. Auf- und Abzählen mit beliebigen Intervallen, z. B. 1, 2, 3, ... 100, 100, 99, 98 ..... 1; — 1, 3, 5 :c. 1, 4, 7 :c. 1, 5, 9 :c., wird bis zur Fertigkeit eingeübt, und alle vier Rechnungsarten werden getrieben, aber es wird keine Ziffer gebraucht. Auch die Rechenpfennige, oder was man sonst zur Versinnlichung benutzt, werden nur im Anfange einer neuen Uebung angewendet; lange dürfen sie nicht nöthig sein.

Die zweite Stufe übt das Zehnersystem, und zwar zuerst mit Rechenpfennigen und dann erst mit Ziffern. Die kleinsten Rechenpfennige gelten Eins, die mittleren Zehn, die größten Hundert. Es ist eine Freude zu sehen, wie Kinder mit Rechenpfennigen addiren, multipliziren, subtrahiren, dividiren. Geht die Sache mit Rechenpfennigen und im Kopfe, so ist nichts leichter, als dieselben Aufgaben nun in Ziffern rechnen zu lassen; schon die größere Bequemlichkeit treibt die Kinder, sich des neuen Zeichens schnell zu bemächtigen.

Obgleich auf dieser zweiten Stufe nun keinesweges das schriftliche Operiren vollständig gelehrt wird, und das Kopfrechnen immer die Hauptsache bleibt, so läßt sich doch schon hier eine vollständige Einsicht in das Wesen und die Anwendung der vier Spezies geben; nur muß jede Regel, außer daß die Kinder sie selbst zu finden haben, blos als Klugheitsregel, als Erleichterungsmittel, aber ja nicht als feste Norm dargestellt werden. Die Kinder müssen jeden Augenblick das erhebende Bewußtsein haben, daß sie Herren des Gebietes sind, auf dem sie wandeln.

Ich sage ihnen also, daß 2 und 3 und 4, $2 + 3 + 4$ geschrieben wird, daß dieser Ausdruck eine Summe heißt und das Zusammenfassen ($= 9$) Addiren genannt wird.

Haben sie $12 + 23 + 29$ zu addiren, so finden sie selber es bequem, erst die Zehner, dann die Einer zu addiren: $(10 + 2) + (20 + 3) + (20 + 9) = (10 + 20 + 20) + (2 + 3 + 9) = 50 + 14 = 64$.

Indem sie bei der Bildung des Einmaleins Summen empfangen, deren Summanden gleich sind, sage ich ihnen, daß man für $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ ein kürzeres Zeichen hat, $3 . 5$.

Hat man $24 . 3$, so entdecken die Schüler leicht selbst, daß dieses heißt: $(20 . 3) + (4 . 3) = 60 + 12 = 72$.

Eben so leicht finden sich achtjährige Kinder in die Rechnung, wenn beide Faktoren, z. B. $24 . 12$, müssen zerlegt werden. Sie sagen alsdann so:

$24 . 12 = (20 + 4) . (10 + 2)$. Dieses wieder zerlegt gibt:

$$\begin{array}{r} 20 . 10 = 200 \\ 4 . 10 = 40 \\ 20 . \ 2 = 40 \\ 4 . \ 2 = 8 \\ \hline 288. \end{array}$$

Die Subtraktion ist in dieser Weise etwas beschwerlich.

$122 - 38 = (100 + 20 + 2) - (30 + 8) = (100 - 30) + (20 - 8) + 2 = 70 + 12 + 2 = 84.$

Auch das Dividiren ist, wenn man es ohne die gewöhnlichen Vortheile vollziehen läßt, etwas mühsam; soll die Operation aber begriffen werden, so darf man diese Mühe nicht scheuen.

$$144 : 12 = \frac{120 + 24}{12} = 10 + 2 = 12; \text{ oder}$$

$$= \frac{100 + 44}{12} = \frac{100}{12} + \frac{44}{12} = 8 + \frac{44 + 4}{12} = 8 + 4 = 12.$$

Hieran reihen sich, schon der Aufmunterung wegen, leichte Proportionen (Regeldetriaufgaben), denn haben die Kinder eine Zeit lang geübt:

$2.6 = 3.x = 4.x$
$3.8 = 4.6 = 6.4 = 8.3 = 12.2$ u. s. w. und
$12 : 2 = 18 : x = x : 5$
$24 : 3 = 48 : 6 = 32 : 4 = 16 : 2$ u. s. w.,

so rechnen sie die gewöhnlichen Regeldetriexempel ohne Schwierigkeit.

Erst nachdem die vier Spezies in dieser Weise, bald mit Rechenpfennigen, bald mit Ziffern, bald im Kopfe, eingeübt worden sind *), und man die dritte Stufe, das Bruchrechnen, betrachtet hat, kann auf der vierten der Schüler nicht nur mit den gebräuchlichen, sondern mit so vielen Rechnungsvortheilen bekannt gemacht werden, als der Lehrer nur weiß und der Schüler Lust zu benutzen hat. Daß ein nach der obigen Weise unterrichteter Knabe das Untereinanderschreiben, Imsinnebehalten und Borgen beim Addiren und Subtrahiren, das Hereinrücken der Zahlen beim Multipliziren u. s. w. mit größter Leichtigkeit merkt und den Grund davon einsieht, versteht sich von selbst, doch hat man auch hier noch Uebergänge zu machen, und man wird z. B. wohl thun, ehe man in der gewöhnlichen Weise dividiren läßt, die Operation noch in folgender Gestalt vornehmen zu lassen:

---

*) Man braucht wol nicht besonders darauf aufmerksam zu machen, daß diese Art zu operiren 1) Einsicht in die Entstehung der Zahlen gewährt, 2) mit dem Verfahren des Kopfrechnens übereinstimmt, und 3) eine direkte Vorbereitung auf die Buchstabenrechnung ist.

$$512:16=x$$

1) 16 in 500 wie oft mal? $500:16=30$ denn $30.16=480$. Rest 20.

2) 16 in 32 wie oft mal? $(20+12):16=2$ denn ꝛc.

Nun ist der Schüler befähigt, alle gemeinen Rechnungen successive zu erlernen; wie weit man gehen will, hängt von den Umständen ab.

Wie der Unterricht in der Formenlehre einzurichten, ist aus den vortrefflichen Schriften von Diesterweg, Harnisch und Graßmann zu erfahren. Keiner glaube, wenn nicht das innere Anschauungs- und Denkvermögen der Jugend an scharf bezeichneten Gegenständen der äußern Anschauung erweckt und geübt, und das Urtheil eine Zeit lang durch das Zeugniß der Sinne vermittelt und so dem Gedanken eine Stütze geboten worden ist, daß irgend ein Schüler zum wissenschaftlichen Studium der Geometrie befähigt sei. Für die Elementarschule ist dieser Unterricht auch aus praktischen Gründen äußerst wichtig; er bereitet den Schüler nach Erkenntniß und Erkenntnißkraft zu den verschiedenen Fächern des gewerblichen Lebens vor.

Aber es ist noch ein dritter Gegenstand in den Kreis des Elementarunterrichts zu ziehen, möge derselbe nun als Vorbereitung aufs Leben oder zur Wissenschaft betrieben werden, nämlich die Lösung algebraischer Aufgaben in rein raisonnirender Weise. Auch hier ist es wieder die Volksschule, welche sich den Ruhm der Initiative erworben hat *).

Schließlich muß ich Herrn **Dr.** Willing für gütige Mittheilung mehrerer Entwickelungsgänge danken, die mir vielleicht selbst nicht eingefallen wären. So ist der Gedanke von ihm, die §§ 65, 67, 70, 73, 75 durch Anwendung des $a=a:1$ zu lösen, ein sinnreiches Verfahren, von dem ich zwar im Text keinen Gebrauch gemacht, das ich aber in der Note zu § 79 gezeigt habe. Da dieser vorzügliche Mathematiker uns nächstens mit einem ausführlichen System seiner Wissenschaft beschenken will, so wird sich beim Erscheinen dieses Buches herausstellen, in wiefern sein Weg

---

*) Vor mehreren Jahren gab Diesterweg einen Leitfaden in drei Bändchen heraus; in neuerer Zeit ist von Herrn Seminarlehrer Stubba zu Bunzlau eine „Sammlung von algebraischen Aufgaben und Anleitung zur Auflösung derselben durch Verstandesschlüsse“ (zweite Aufl. 1836) erschienen, die ich nicht dringend genug empfehlen kann.

zugleich der meinige ist. Auch dem Herrn Professor Lubbe, der die erste Auflage dieses Heftes durchzulesen die Güte gehabt hat, bin ich für einige Bemerkungen Dank schuldig. Ich habe diese Herren und noch einige andere mathematische Freunde um Entschuldigung zu bitten, daß ich ihre Vorschläge nur in soweit benutzt habe, als sie mit meinem heuristisch-genetisch-kombinatorischen Prinzip sich vereinigen ließen, was bei den nicht nur von mir, sondern auch unter sich differirenden Gesichtspunkten und Anschauungsweisen der zu Rathe gezogenen Mathematiker fast immer schwer und sehr oft unmöglich war.

Berlin, Mai 1837.

Mgr.

Mathesis.

Erster Theil:

Allgemeine Zahlenlehre.

A.

Analysis des Endlichen.

Erste Abtheilung:

Theorie der identischen Gleichungen.

Erstes Kapitel:

Theorie der Operationen mit wirklichen Zahlen.

§ 1.

An den, der das Studium der Mathesis beginnt, macht diese Wissenschaft die Forderung, daß er das abstrakte Eins denken könne. Um dasselbe für das Auge darzustellen, setzen wir ein durchaus willkürlich gewähltes Zeichen fest, welches I sein möge. Eins.

Anmerk. f. d. Lehrer. Die Natur der Mathematik als der Wissenschaft des abstrakten Verstandes bringt es mit sich, daß wir Wörter wie denken, Begriff u. s. w. in dieser Schrift weder vermeiden, noch in ihrer wahrhaften, d. h. philosophischen Bedeutung gebrauchen können. Hätten wir, statt Denken, Vorstellen gesagt, so wäre blos eine Unbequemlichkeit für eine andre eingetauscht worden. Denn die Zahl ist Gedanke, aber der Gedanke als ein sich vollkommen äußerliches Sein. Die Zahl gehört, weil sie Gedanke ist, nicht der Anschauung an, aber sie ist der Gedanke, welcher die Aeußerlichkeit der Anschauung zu seiner Bestimmung hat. Wie Raum und Zeit, welche Abstraktionen ohnedies Prinzip der Mathematik sind, könnte man auch die Zahl das unsinnliche Sinnliche nennen.

§ 2.

Das abstrakte Eins wiederholt gesetzt und die Resultate dieses Setzens zu einer Einheit oder in einen Inbegriff zusammengefaßt, gibt die abstrakte Zahl. Zahl.

Zusatz. Daß Einheit und Zahl dasselbe sind, leuchtet ein. Zwölf ist als Dutzend betrachtet eine Einheit. So jede

Raumgröße, z. B. ein △ ABC. Reflektirt man aber auf die Entstehung des Dutzends und betrachtet es als das Resultat des zwölfmal gesetzten Eins, so ist es Zahl. So kann auch das △ ABC in beliebig viele kleinere △ △ abc, def, ghi..... eingetheilt sein. Oder: Ein bestimmtes Quantum wird, unter dem Gesichtspunkt der Kontinuität aufgefaßt, Einheit genannt; abstrahirt man aber von dem Momente der Kontinuität und faßt die Einheit nach dem Momente der Diskretion als Anzahl auf, welche das Eins zum Elemente hat, so nennt man Zahl, was oben Einheit hieß.

Anmerk. f. d. Lehrer. Da die Mathematik nicht Philosophie ist, so hat sie das Recht, ihre Grundbegriffe Eins, Zahl, Zahlenreihe, Gleichung als unmittelbar gegebene, als Thatsachen des Bewußtseins vorauszusetzen. Was der Begriff dieser Begriffe ist, das zu entwickeln ist Sache der objektiven Logik (oder Metaphysik).

§ 3.

Zahlenreihe. Und da nichts hindert, zu jeder Zahl, von wie vielmaligem Setzen des Eins sie auch die Einheit (der Inbegriff) sein möge, das Eins noch einmal hinzuzudenken und Beides wieder zu einer Einheit zusammenzufassen, so ist das Zählen oder Zahlenbilden ein Prozeß in's Unendliche, und die Zahlenreihe unendlich.

§ 4.

Größer und Kleiner. Jede Zahl der Zahlenreihe soll, verglichen mit einer vorhergehenden Zahl derselben Reihe, größer heißen, verglichen mit einer nachfolgenden, kleiner. Als willkürliches Zeichen für Größer und Kleiner möge $>$ und $<$ dienen, z. B.

$$\text{III} > \text{II}.$$
$$\text{II} < \text{III}.$$

Zusatz. Aus dieser Erklärung folgt, daß wenn

$$\begin{array}{c} a > b \\ b > c \\ \hline a > c \end{array}$$

Anmerk. Die Nothwendigkeit, die innerlich angeschauten Zahlen und ihre Verbindnngen zu einem Aeußeren zu machen, führt auf die Erfindung von Zeichen, die wir auf diesem Gebiete völlig willkürlich wählen können. Es bestehen solche Zahlzeichen (4; IV; ד) u. s. w.;

dieselben bezeichnen eine bestimmte Zahl der Zahlenreihe. Da die Mathesis aber nicht allein lehren will, was von dieser oder jener bestimmten Zahl und den Relationen bestimmter Zahlen gilt, sondern das System der allgemeinen Gesetze der Zahlen ist, d. h. solcher Gesetze, welche für jede Zahl der Zahlenreihe, also für alle, gelten: so hat sie sich genöthigt gesehen, solche Zeichen zu erfinden, welche jede bestimmte Zahl zu repräsentiren fähig sind. Die Buchstaben boten sich als das bequemste Zeichen dar, und so bedeutet denn a eine Zahl, man will oder braucht nicht zu wissen, welche. Da aber a für jede Zahl der Zahlenreihe stehen, d. h. unendlich viele Werthe annehmen kann — obgleich in jedem einzelnen Falle ihr Werth im Verhältniß zu andern Zahlen derselben Verbindung ein bestimmter ist —: so ist klar, daß ein für a gefundenes Gesetz nicht nur für diese und jene Zahl, sondern für alle Zahlen gefunden und gültig ist.

§ 5.

Bezeichnet man eine Zahl einmal mit a und ein zweites Mal mit b, so sagt man: a sei gleich b, da beide Zeichen dieselbe Zahl bezeichnen. Symbolisch drückt man dieses Verhältniß zwischen a und b aus durch $a = b$, nennt den Ausdruck $a=b$ eine Gleichung, a die linke, b die rechte Seite der Gleichung. Gleichung.

Hieraus folgt: Ist $a = q$, $b = q$, so ist $a = b$, oder wenn $a = b$, $b = c$, $c = d$, so ist $a = d$.

Da nun ferner, wenn $a = b$, beide Zeichen dieselbe Zahl bezeichnen, so versteht es sich von selbst, daß keine mit der einen Seite der Gleichung, etwa b, vorgenommene Veränderung (Verminderung oder Vermehrung) die Gleichung aufheben kann, vorausgesetzt, daß dieselbe Veränderung an der anderen Seite der Gleichung, also bei a, ebenfalls statt habe.

Anmerk. Eigentlich müßte man oben sagen: die durch das Zeichen a repräsentirte Zahl ist gleich der durch b vorgestellten. Nur der Kürze wegen spricht man von einer Zahl a.

§ 6.

Die Zahl (§ 2.) war das Resultat der wiederholt gesetzten und zur Einheit zusammengefaßten Einse. Wie aber die Einse zur Zahl, so können Zahlen wieder zur Einheit (in einen Inbegriff) zusammengefaßt werden, woraus denn eine Summe.

neue Zahl entsteht. Diese neue Zahl, welche das Eins so oft enthält, als eine beliebige Anzahl anderer Zahlen zusammengenommen es enthalten — diese anderen Zahlen können durch a, b, c, oder sonst beliebig bezeichnet werden —, wollen wir durch folgendes Zeichen vorstellen:

1) $a+b$ oder

2) $(a+b)+c$ oder

3) $\big((a+b)+c\big)+d$ oder

4) $\Big[\Big(\big((a+b)+c\big)+d\Big)+\ldots\ldots\Big]+m_{\tau}$

und dieses Zeichen (oder diesen Ausdruck oder Zahlen-Komplexus) Summe nennen; die einzelnen Glieder des Ausdrucks, a, b, c u. s. w. sollen Summanden heißen; wie viele aber der Summanden die Summe bilden, ist in dem vierten Ausdrucke unbestimmt gelassen, aber durch das τ subscriptum angezeigt worden, daß ihrer τ sind.

Anmerk. Der § enthält Summen von zwei (a, b), drei (a, b, c), vier (a, b, c, d) und unbestimmt vielen, d. h. von τ Summanden. Hierüber und über die Klammern bedarf es der Verständigung.

Es ist nämlich die erste Summe

$$a+b$$

eine Summe zweier Summanden. Wie es aber bei der Zahlenbildung rein willkürlich ist, wie viele Einse ich zur Einheit, d. h. zur Zahl zusammenfassen will

I, I, woraus II

(II), I, woraus III

(III), I, woraus IIII u. s. f.,

so hängt es auch bei der Summe nur von der Willkür ab, wie viele Zahlen (Summanden) ich zur Einheit (Summe) zusammenfassen will. Hab' ich nun die Zahlen a und b zur Summe gemacht — summirt — wodurch

$$a+b$$

entsteht, so hindert mich nichts eine neue Zahl, etwa c hinzuzufügen, woraus denn eine neue Summe

$$(a+b)+c$$

entsteht.

Will man nun die Entstehungsart dieser Summe nicht aus den Augen verlieren, so bedient man sich zu diesem Ende der Klammern

$$\left[\left(\left(\left((a+b)+c\right)+d\right)+e\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+m_r.$$

Die Klammern dieser Summe zeigen an, daß 1) b zu a; 2) zu dieser Summe c; 3) zu dieser Summe d; 4) zu dieser Summe e; 5) zu dieser Summe nach und nach die nicht ausgedrückten und nur durch Punkte angedeuteten Summanden; 6) zu dieser Summe m summirt werden soll.

Auf diese Weise zeigt es sich aber, daß jede Summe mehrerer Summanden als eine Summe zweier Summanden betrachtet werden kann.

Ist $a+b=q$, so ist $(a+b)+c=q+c$.
Ist $q+c=r$, so ist $((a+b)+c)+d=r+d$.
Ist $r+d=s$, so ist $(((a+b)+c)+d)+e=s+e$ u. s. f.

Obgleich nun die Summe $a+b$ jede Zahl zu repräsentiren fähig ist und alsbald als Summe von beliebig vielen Summanden angesehen werden kann, wenn man nur b als $=[((m+n)+o)+\ldots\ldots]+p_r$ ansieht, so wollen wir doch, wo es sich von Summen handelt, die allgemeinere Form der bestimmten Form vorziehen. Es ist in der Summe $a+b$ zwar der Werth der einzelnen Summanden und mithin der Summe selbst kein bestimmter, aber es ist doch die Anzahl der Summanden — hier zwei — bestimmt, und somit möchte dem Anfänger zweifelhaft scheinen, ob Gesetze, die für Summen von zwei Summanden gelten, auch noch für Summen von drei, vier, tausend, endlich für r Summanden gültig sind. Die von uns eingeführte Neuerung, die Anzahl der Summanden durch das r subscriptum oder jeden andern Buchstaben zu bezeichnen, gewährt die absolute Allgemeinheit, deren wir bedürfen.

§ 7.

Beliebig viele Zahlen als Summe auffassen — summiren — heißt addiren. Die Operation wird symbolisch dadurch vollzogen, daß man das Zeichen der Summe hinschreibt. Addiren.

§ 8.

Es entsteht nun die Frage, ob eine Summe dieselbe bleibt, wenn man die Ordnung ändert, in welcher ihre Summanden aufeinander folgen. Addiren in beliebiger Ordnung.

Gesetzt wir haben eine Summe von r Summanden

$$\Big[\Big(\Big(\Big(\Big((a+b)+c\Big)+d\Big)+e\Big)+f\Big)+\ldots\ldots\Big]+m_r$$

und diese Summe sei gleich q. Da nun Zahl nichts anders ist, als der Inbegriff des wiederholt gedachten Eins; da die Summanden a, b, c, d, e, f u. s. w. ebenfalls Resultate des wiederholt gedachten Eins sind — (es ist $a=1+1+1+\ldots\ldots\ldots\ldots+1_a$); das Eins aber sich selbst gleich ist: so ist klar, daß man das q auf beliebige Art kann entstehen lassen, und daß aus den Summanden der obigen Summe, in welcher Ordnung man sie auch zusammenfassen möge, stets nur q werden kann. Es ist demnach

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=c+(a+b)=(a+c)+b \text{ u. s. w.}$$

Zusatz. Hier zeigt sich aber auch, daß man, wo nicht besonderes Interesse vorhanden ist die Entstehungsart der Summe nicht aus den Augen zu verlieren, Summen ohne Klammern schreiben kann. Die Klammern nämlich in der obigen Summe zeigen an, daß erst b zu a und alsdann zu dieser Summe a+b noch c addirt werden soll. Da ich nun in beliebiger Ordnung addiren kann, so werden die Klammern überflüssig:

$$a+b+c+d+e+f+\ldots\ldots+m_r.$$

Bemerk. Ueberschauen wir jetzt die gewonnenen Begriffe, so finden wir: Eins, Zahl, Gleichung, Größer und Kleiner, welche beiden letzten Beziehungen Ungleichung zu nennen wir uns erlauben wollen, und Summe. Bis hierher ist der Vortrag aus nahe liegenden Gründen akroamatisch gewesen*); da es aber gerade der Zweck gegenwärtiger Bearbeitung der Mathematik ist, die dogmatische Methode mit der heuristischen zu vertauschen, so werden wir jetzt den Weg des Erfindens zeigen und gehen müssen. Um nun etwas Neues zu finden, werden wir die in den bisherigen §§ niedergelegten Begriffe durch die Operation der Ad-

*) Der praktische Lehrer wird indeß wohl thun ein halbes Dutzend Stunden nicht für verloren zu achten, wenn er sie dazu anwendet, den Inhalt der §§ 1—8 durch Sokratisiren aus dem Lernenden heraus zu analysiren.

dition, als bei welcher wir eben stehen, miteinander kombiniren müssen. Auf diese Weise erhalten wir z. B.

I. Z.+E.	V. Ungl.+Z.
II. E+Z.	VI. Z+S.
III. Z+Z.	VII. S+Z.
IV. Gl.+Z.	VIII. S+S.

Es zeigt sich auf den ersten Blick, daß mehrere dieser Kombinationen entweder nichts Neues lehren, oder mit anderen zusammenfallen. So liegen die Kombinationen I. und II. im bloßen Zählen (§ 3). Komb. III. in der Definition der Addition (§ 7), so wie auch besonders in dem allgemeinen Satze § 8; Komb. IV. (wenn $a=b$, so ist $a+$ $+m=b+m$.) ist durch § 5. erledigt.

Bevor wir jedoch die Lösung der Kombinationen beginnen, müssen wir dem Lernenden sagen, worauf es bei dieser Lösung ankommt und was denn eigentlich verlangt wird.

Aus § 5 wissen wir, daß eine Zahl nach Belieben bezeichnet werden kann. Dieselbe Zahl kann bezeichnet werden durch m, $a+b$ und (§ 8.) $b+a$. Alsdann sagen wir

$$m=a+b=b+a.$$

Wir haben demnach hier für dieselbe Zahl verschiedene Ausdrücke oder Formen.

Wird nun irgend etwas verlangt, z. B. man solle die Aufgabe, wie eine Summe zu einer Zahl addirt wird, lösen, so heißt das: man soll alle möglichen Formen angeben, welche der Ausdruck $a+(m+n)$ — d. h. Z+S. — annehmen kann.

Um aber symbolisch anzuzeigen, daß diese Aufgabe gestellt, d. h. daß ein andrer Ausdruck oder Form für den Ausdruck oder Form $a+$ $+(m+n)$ verlangt wird, bedient man sich des Zeichens

$$a+(m+n)=x$$

und dieses x ist alsdann der vorläufige Stellvertreter für die noch unbekannte Form, welche man sucht.

Gleichungen aber wie diejenigen, womit wir es hier zu thun haben, heißen **identische**.

§ 9.

Wenn

$$a>b$$ Ungl.+Z.

so folgt (§ 4.) a in der Zahlenreihe nach b. Geht man nun von a aus um beliebig viele Stellen weiter und erhält man dann die Zahl $a+m$, und geht von b aus um eben so viele Stellen weiter, wo man dann $b+m$ erhält, so ist die durch $a+m$ ausgedrückte Zahl wieder größer als $b+m$.

Folglich

$$\frac{a > b}{a+m > b+m.}$$

Wörtlich: Gleiches zu Größerem und Kleinerem addirt, gibt wieder Größeres und Kleineres.

Zusatz. Wenn aber

$$\frac{\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}}{a+c > b+d.}$$

Denn $a+c > b+c$ (§ 9.); $b+c > b+d$; folglich $a+c > b+d$.

§ 10.

s+z. $(a+b+c+\ldots\ldots\ldots+m_r)+s = x.$

$a+b+c+\ldots\ldots\ldots+m+s_{r+1}$ *) $= x.$

Nach § 8. kann man die Klammern auslassen.

$a+b+c+\ldots\ldots\ldots+m+s_{r+1} =$

$= a+s+b+c+\ldots\ldots+m_{r+1} =$

$= a+b+s+c+\ldots\ldots+m_{r+1} =$

$= a+b+c+s+\ldots\ldots+m_{r+1} =$

$= a+b+c+m+\ldots\ldots+s_{r+1}$ u. s. w.

Nach demselben § kann man in beliebiger Ordnung addiren.

Wörtlich: Zu einer Summe wird eine Zahl addirt, wenn man die Zahl zu einem der Summanden, gleichviel zu welchem, addirt und den oder die anderen unverändert läßt.

§ 11.

z+s. Da nach dem vorigen §

$$(a+b+c+\ldots\ldots+m_r)+s = a+b+c+m+\ldots\ldots+s_{r+} =$$
$$= a+(b+c+m+\ldots\ldots+s_r),$$

so liegt in dieser Gleichung, umgekehrt gelesen, die Lösung der gegenwärtigen Kombination.

Wörtlich: Zu einer Zahl a wird eine Summe $b+c+m+$ $+\ldots\ldots+s_r$ addirt, wenn man einen Summanden nach dem andern zu der Zahl a addirt

---

*) $r+1$, weil zu den r Summanden ein neuer hinzutritt.

§ 12.

Setzen wir in der vorigen Gleichung $s+s.$

$$a+(b+c+m+\ldots\ldots+s_{\gamma})=a+b+c+m+\ldots\ldots+s_{\gamma+1}$$

statt a, eine S, $u+v+w+\ldots\ldots+q_{\beta}$, also

$(u+v+w+\ldots\ldots+q_{\beta})+(b+c+m+\ldots\ldots+s_{\gamma})$ oder ohne Klammern

$$u+v+w+q+b+c+m+\ldots\ldots+s_{\beta+\gamma}$$

und bedenken alsdann, daß man in beliebiger Ordnung addiren, also für diesen Ausdruck

$$u+b+v+c+w+m+q+\ldots\ldots s_{\beta+\gamma} \text{ u. s. w.}$$

setzen kann, so ist der gegenwärtigen Kombination genügt.

Wörtlich: Eine Summe wird zu einer Summe addirt, wenn man die Summanden der zweiten in beliebiger Reihenfolge zu einem beliebigen Summanden der ersten Summe addirt.

Anmerk. Will man statt der etwas unbequemen allgemeinen Ausdrücke in §§ 10, 11, 12 weniger allgemeine wählen, so stellen sich die drei Sätze also dar:

1) $(a+b)+m = (a+m)+b =$
$= (m+a)+b =$
$= m+a+b$ u. s. w.

2) $a+(m+n) = a+m+n =$
$= (a+m)+n$ u. s. w.

3) $(a+b)+(m+n) = a+b+m+n =$
$= (a+b+m)+n =$
$= a+(b+m+n) =$
$= a+(b+n+m) =$
$= a+(m+b+n)$ u. s. w.

§ 13.

Denken wir uns in der Summe Produkt.

$$\left[\left(\left(a+b\right)+c\right)+\ldots\ldots\right]+m_{\gamma}$$

alle Summanden gleich, also (ohne Klammern geschrieben)

$$a+a+a+\ldots\ldots+a_{\gamma},$$

so erhalten wir eine eigenthümliche Art von Addition, nām-

lich Addition gleicher Summanden, welchen Fall wir jetzt betrachten wollen. Und da in dieser Summe nur der gleiche Summand a und die Zahl der Summanden τ zu betrachten, so können wir für Summen gleicher Summanden ein bequemeres Zeichen erfinden, welches $a \times \tau$ oder $a . \tau$ oder auch $a\ \tau$ sein möge. Das Zeichen $a\ \tau$ soll **Produkt** heißen, a der **Multiplikandus**, τ der **Multiplikator** des Produkts.

Zusatz. Ein Produkt am hat folglich nur dann eine Bedeutung, wenn $m > 1$ ist, weil eine Summe von einem Summanden keinen Sinn gibt.

Anmerk. Wie die Summe, obgleich ein zusammengesetztes Zeichen, doch nur Eine Zahl bedeutet, so auch das Produkt.

§ 14.

Multipliziren

Wird verlangt, man solle a mit b multipliziren, so heißt das, man solle sich eine Summe von b Summanden denken, deren jeder a ist. Die Operation wird symbolisch dadurch vollzogen, daß man das Zeichen des Produkts hinschreibt.

Bemerk. Die bis jetzt gewonnenen Begriffe geben durch die neue Operation des Multiplizirens kombinirt folgende Aufgaben.

I. Z×E.	V. Prod.×Z.	IX. Z×S.
II. E×Z.	VI. Z.×Prod.	X. S×S.
III. Ungl.×Z.	VII. Prod.×Prod.	XI. Prod.+Prod.
IV. Z×Z.	VIII. S×Z.	

Die Komb. Gl.×Z. ($a = b$, $am = bm$) ist in § 5 erledigt; Z. E. ist sinnlos (§ 13. Zus.).

Noch bemerken wir, daß die von uns gewählte Aufeinanderfolge der Kombinationen vielfacher Aenderungen fähig ist, da sich fast jeder Satz auf mehr als eine Art entwickeln läßt. Es kann z. B. der Lehrer, um den Schüler zu üben, die Kombinationen in der Folge, wie sie hier numerirt sind, auflösen lassen.

§ 15.

E×Z.

$$1 . a = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1_a = a,$$

weil a das Eins amal enthält.

§ 16.

Wie verhält sich am zu bm, wenn $a > b$? Ungl.×Z.
Es ist

$$a + a > b + b \text{ (§ 9 Zus.), d. h.}$$
$$a \,.\, 2 > b \,.\, 2. \text{ Aus demselben Grunde}$$
$$(a \,.\, 2) + a > (b \,.\, 2) + b, \text{ d. h.}$$
$$a \,.\, 3 > b \,.\, 3.$$

Setzen wir nun $a \,.\, m > b \,.\, m$, so ist

$$(am) + a > (bm) + a \text{ u. s. f.}$$

Wörtlich: Größeres und Kleineres mit Gleichem multiplizirt, gibt Größeres und Kleineres.

§ 17.

Soll eine Summe, etwa $a + b + c + \ldots\ldots + k_r$, mit m s×Z. multiplizirt werden, so heißt das, man solle sie mmal hinschreiben und das Resultat in einen Inbegriff auffassen.

$$(a + b + c + \ldots\ldots + k_r)m =$$
$$= a + b + c + \ldots\ldots k_r) + (a + b + c + \ldots\ldots k_r) + (a + b + c + \ldots\ldots + k_r) +$$
$$+ (a + b + c + \ldots\ldots + k_r) + \ldots\ldots\ldots + (a + b + c + \ldots\ldots + k_r)_m \,.$$

Da man nun in beliebiger Ordnung addiren kann, so verwandelt sich diese Summe in

$$(a + a + a + \ldots + a_m) + (b + b + b + \ldots + b_m) + (c + c + c + \ldots c_m) +$$
$$+ \ldots\ldots + (k + k + k + \ldots\ldots + k_m)_r =$$
$$= am + bm + cm + \ldots\ldots + km_r.$$

Wörtlich: Eine Summe wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man jeden ihrer Summanden mit der Zahl multiplizirt und die einzelnen Produkte alsdann summirt.

Anmerkung, das tiefe r in der letzten Summe betreffend. Die obige mit m multiplizirte Summe hat r Summanden, folglich werden wir auch r Produkte in der neuen Summe haben. Kännte man die durch die Punkte angedeuteten Summanden, oder hieße die Summe, um einen Spezialfall anzuführen, $a + b + c$, so gäbe dieselbe mit m multiplizirt, $am + bm + cm$; da diese Summen aber in der Anzahl ihrer Summanden — hier drei — bestimmt sind, so hätte man allerdings nicht nöthig, dieselben zu schreiben: $a + b + c_3$ und $am + bm + cm_3$.

Zusatz. Aus diesem Satze

$$(a+b+c+\ldots.+k_{\mathfrak{r}})m=(am+bm+cm+\ldots.+km_{\mathfrak{r}})$$

geht umgekehrt gelesen eine Lösung der Kombin. XI. Prod.+Prod. hervor, nämlich für den Fall, daß die zu summirenden Produkte alle den Multiplikator gemeinschaftlich haben. Die Formel zeigt, daß in diesem Falle die Multiplikanden zu addiren sind und der so entstandenen Summe demnächst der gleiche Multiplikator als Multiplikator beizuschreiben ist:

$$am+bm+cm+\ldots.+km_{\mathfrak{r}}=(a+b+c+\ldots.+k_{\mathfrak{r}})m.$$

§ 18.

Prod.×Z. $(ab)m=x.$

Erinnern wir uns an die Entstehungsart des Produkts ab, das hier mit m zu multiplizieren, so finden wir

$$(a+a+a+\ldots\ldots+a_b)m=x,$$

d. h. eine Summe von b gleichen Summanden a ist mit m zu multiplizieren. Um für die Summe das x zu finden, stehen uns zwei Wege offen; es ist

$$(a+a+a+\ldots\ldots+a_b)m=(ab)m,\text{ oder auch}$$

$(a+a+a+\cdots+a_b)m=$(nach § 17)$(am+am+am+\cdots+am)_b=$
$=(am)b$, folglich

$$(ab)m=(am)b.$$

Wörtlich: Ein Produkt ab wird mit einer Zahl m multiplizirt, wenn man den einen Faktor mit der Zahl multiplizirt und den andern unverändert läßt.

Zusatz. Setzen wir in obiger Formel $a=1$, so haben wir für $(1b)\,m=(1m)\,b$ nach § 15

$$bm=mb.$$

D. h. Im Produkte zweier Faktoren kann man Multiplikand und Multiplikator ihre Stelle ändern lassen und da es nun gleichgültig ist, welches Glied des Produkts ich Multiplikand oder Multiplikator nenne, so dürfen beide von nun an gemeinschaftlich den Namen Faktoren des Produkts tragen.

§ 19.

$m(a+b+c+\ldots\ldots q_{\mathfrak{r}}) = (a+b+c+\ldots\ldots q_{\mathfrak{r}})m$ (§ 18 Zus.) = $z \times s$.
$= (am+bm+cm+\ldots\ldots+qm)_{\mathfrak{r}}$ (§ 17) =
$= (ma+mb+mc+\ldots\ldots+mq_{\mathfrak{r}}$ (§ 18 Zus.)

Wörtlich: Eine Zahl wird mit einer Summe multiplizirt, wenn wir sie mit jedem der Summanden multipliziren und die Produkte wieder summiren.

§ 20.

Aus dem vorigen Satze oder aus § 17 geht auch die gegenwärtige Kombination hervor. $s \times s$.

$(a+b+c+\ldots+k_{\mathfrak{r}})(m+n+o+\ldots+p_{\gamma}) =$ (für die zweite Summe vorläufig S gesetzt.)
$= aS+bS+cS+\ldots\ldots+kS_{\mathfrak{r}}$ = (§ 18 Zus.)
$= Sa+Sb+Sc+\ldots\ldots+Sk_{\mathfrak{r}}$ = (das S wieder vertauscht.)
$= \big((m+n+o+\ldots+p_{\gamma})a+(m+n+o+\ldots+p_{\gamma})b+(m+n+$
$+o+\ldots+p_{\gamma})c+\ldots\ldots\ldots+(m+n+o+p_{\gamma})k\big)_{\mathfrak{r}} =$
$= \big((ma+na+oa+\ldots+pa_{\gamma}) + (mb+nb+ob+\ldots+pb_{\gamma}) +$
$+(mc+nc+oc+pc_{\gamma})+\ldots+(mk+nk+ok+\ldots+pk_{\gamma})\big)_{\mathfrak{r}}$

Wörtlich: Summen werden miteinander multiplizirt, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der andern Summe multiplizirt und die Produkte summirt.

Als Spezialfall: $(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d =$
$= ac+bc+ad+bd.$

§ 21.

$m(ab) = m(a+a+a+\ldots\ldots+a_{b})$ (§ 19) $= (ma+ma+$ $z \times$ Prod.
$+ma+\ldots\ldots+ma)_{b} = (ma)b.$

Wörtlich: Eine Zahl wird mit einem Produkt multiplizirt, wenn wir sie erst mit dem einen Faktor, das erhaltene Produkt alsdann mit dem andern Faktor multipliziren.

§ 22.

Hier lassen sich mehrere Fälle denken. Prod.+Pro

1) $ab+cd$ läßt sich auf keinen andern Ausdruck bringen.

2) Setzen wir aber die zu summirenden Produkte gleich

$$ab+ab+ab+\ldots\ldots+ab_m,$$

so ist der Fall in § 18 erledigt.

3) Haben endlich die zu addirenden Produkte einen gemeinschaftlichen Faktor, z. B.

$$am+bm+cm+\ldots\ldots+km_\tau,$$

so ist der Fall in § 17. Zus. erledigt $=(a+b+c+$ $+\ldots\ldots+k_\tau)m$.

§ 23.

[M]ultiplizir[en] [in] beliebiger [O]rdnung.

Es wurde oben (§ 18 Zus.) gefunden, daß man in Produkten zweier Faktoren die Faktoren ihre Stelle wechseln lassen, d. h. in beliebiger Ordnung multiplizieren kann. Es entsteht nun die Frage, ob dieses Gesetz allgemein, d. h. für Produkte von beliebig vielen Faktoren gültig ist.

Wie nun die erste Summe eine Summe zweier Summanden ist, zu einer solchen Summe aber wieder eine Zahl addirt und dies beliebig fortgesetzt werden kann, so ist auch das Produkt ursprünglich ein Produkt zweier Faktoren.

$$a+a+a+\ldots\ldots+a_b = ab.$$

Nun aber kann dieses Produkt (§ 18.) wieder multiplizirt werden $ab+ab+ab+\ldots\ldots\ldots+ab_c=(ab)c$

Dieses $(ab)c$ kann wieder multiplizirt werden, und so entsteht uns denn das allgemeine Produkt

$$\left[\left(\left(\left((ab)c\right)d\right)e\right)\times\ldots\ldots\ldots\right]\times m_\tau$$

Die Klammern zeigen auch hier wieder die Entstehung des Produkts an. Es soll nämlich 1) a mit b; 2) ab mit c; 3) (ab)c mit d; 4) ((ab)c)d mit e; 5) dieses Produkt successive mit den durch Punkte angedeuteten Faktoren und 6) dieses Produkt mit m multiplizirt werden; der Faktoren aber sind τ.

Auf diese Weise haben wir in dem obigen Ausdruck nichts als die wiederholt gestellte Aufgabe, welche schon § 18. da war. Da nun nach diesem § ein Produkt mit einer Zahl multiplizirt wird, wenn man einen Faktor damit multiplizirt

und den andern unverändert läßt, so nimmt unser allgemeines Produkt successive folgende Gestalten an:

$$\left[\left((((ab)c)d)e\right)\times\ldots\ldots\right]\times m_r =$$
$$= \left[\left((((ac)b)d)e\right)\times\ldots\ldots\right]\times m_r =$$
$$= \left[\left((((ad)c)b)e\right)\times\ldots\ldots\right]\times m_r =$$
$$= \left[\left((((ae)d)c)b\right)\times\ldots\ldots\right]\times m_r =$$
$$= \left[\left((((am)e)d)c\right)\times\ldots\ldots\right]\times b_r \text{ u. s. w.}$$

Es haben also hier die Faktoren successive ihre Stellen gewechselt. Da aber das Produkt, wie sich gezeigt, dadurch seinen Werth nicht verändert hat, es also einerlei ist, ob ich mir a mit b, ab mit c u. s. w. oder aber a mit m, am mit e u. s. w. multiplizirt, denke: so zeigt sich hier, daß man sowohl allgemein in beliebiger Ordnung multipliziren, als auch die Klammern in den Produkten auslassen oder nach Belieben restituiren kann*).

§ 24.

Prod.×Pro

Deshalb ist

$$(ab)(cd)(ef)(gh) = abcdefgh =$$
$$= hgfedcba \text{ u. s. w.}$$
$$= ((abc)(def)g)h \text{ u. s. w.}$$

Wörtlich: Produkte werden miteinander multiplizirt, wenn man sie nebeneinander schreibt und die Faktoren beider in beliebiger Ordnung nacheinander multiplizirt.

---

*) Es versteht sich von selbst, daß Klammern überall da nothwendig sind, wo ohne sie ein Ausdruck undeutlich würde. Z. B. $a+b.\,c$ ist etwas ganz Anderes als $(a+b)c$; $abcd.\,mn+q$ ist unverständlich und muß entweder $abcd(mn+q)$ oder $(abcd.mn)+q$ geschrieben werden.

§ 25.

Potenz. Denken wir uns in dem Produkte

$$\left[\left(\left((ab)c\right)d\right)\times\ldots\ldots\right]\times m_{\tau},$$

alle Faktoren gleich, also (ohne Klammern geschrieben)

$$aaaa\times\ldots\ldots\ldots\times a_{\tau},$$

so erhalten wir eine eigenthümliche Art von Multiplikation, nämlich Multiplikation gleicher Faktoren, welchen Fall wir jetzt betrachten wollen. Und da in diesem Produkt nur der gleiche Faktor a und die Anzahl der Faktoren τ zu betrachten, so können wir für Produkte gleicher Faktoren ein bequemeres Zeichen erfinden, welches a^{τ} (a hoch τ) sein möge. Das Zeichen a^{τ} soll **Potenz** heißen, a der **Dignand**, τ der **Exponent** der Potenz.

Zusatz. Das Zeichen a^{τ} hat nur dann einen Sinn, wenn sowohl a als $\tau > 1$; denn a^1 würde ein Produkt von einem Faktor bedeuten, 1^a hat aber keinen Sinn, weil der Multiplikator nicht 1 sein kann.

Anmerk. Wie Summe und Produkt, obgleich beide Zeichen zusammengesetzte sind, doch nur Eine Zahl bedeuten, so auch die Potenz.

§ 26.

Potenziren. Wird verlangt, man solle a mit m potenziren, so heißt das, man solle sich ein Produkt von m Faktoren denken, deren jeder a ist. Die Operation wird symbolisch dadurch vollzogen, daß man die Potenz a^m hinschreibt.

Bemerk. Ueberschauen wir jetzt wieder die gewonnenen Begriffe, so entstehen folgende Kombinationen (p soll heißen potenzirt mit):

		Z.	VII. Z. p. S.	XI. Pot. × Z.
I. Ungl. p. Z.	V. Pot. +	S.	VIII. S. p. Z.	XII. Pot. × Pot.
II. Z. p. Ungl.		Prod.	IX. Prod. p. Z. u. s. w.	
III. Z. p. Z.	VI. Pot. + Pot.		X. Z. p. Prod.	
IV. Pot. p. Z.				

Die Komb. Z. p. Z. liegt in der Definition; daß $a^m = b^m$, wenn $a = b$, ist in §. 5. erledigt.

Auch die Sätze von der Potenz sind verschiedenartiger Aufeinanderfolge fähig. Man lasse den Schüler andere Entwickelungen versuchen.

§ 27.

Wenn

$a > b$, so ist 1) mit a multiplizirt (§ 16.) Ungl. p. Z.
$aa > ab$, und 2) mit b multiplizirt
$ab > bb$, folglich
$aa > bb$.

Gesetzt nun, es wäre für irgend einen Werth von m, $a^m > b^m$, so folgte, daß, mit a und b*) multiplizirt

$$a^m . a > b^m . b.$$

Nun gilt aber der Satz, daß wenn $a > b$, auch $aa > bb$, folglich gilt auch nach Vorstehendem die Ungleichung $aaa > bbb$, und deßhalb auch die folgende, $aaaa > bbbb$. Auf diese Weise in infinitum fortschließend, erhellt die Allgemeinheit der Wahrheit, daß Größeres und Kleineres mit Gleichem potenzirt, Größeres und Kleineres gibt.

§ 28.

Wenn aber $m > n$, wie verhalten sich da a^m zu a^n? Z. p. Ungl.
Es ist

$$aa > a$$
$$aaa > aa > a$$
$$aaaa > aaa > aa > a$$

Folglich da $m > n$, $a^m > a^n$.

Wörtlich: Gleiches mit Größerem und Kleinerem potenzirt, gibt Größeres und Kleineres.

§ 29.

$a^{m+n+o+\ldots\ldots+q_r}$ heißt, man soll a so oft hinschreiben, Z. p. S.
als $m+n+o+\ldots\ldots+q_r$ anzeigt und demnächst diese a als Faktoren eines Produkts behandeln. Also

$$a^{m+n+o+\ldots+q_r} = a.a.a\ldots\ldots a_{m+n+o+\ldots\ldots+q_r} =$$
$$= aaa\ldots.a_m .\; aaa\ldots.a_n .\; aaa\ldots.a_o \times \ldots\ldots.$$
$$\ldots \times (aaa\ldots.a_q)_r =$$
$$= a^m .\; a^n .\; a^o \times \ldots\ldots \times (a^q)_r .$$

*) Hier ist ein vom Schüler leicht zu erweisender Satz vorausgesetzt, Z×Ungl. ($m > n$, $am > an$), der zwischen § 16. und 17. einzuschalten ist.

Wörtlich: Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, wenn man sie mit jedem der Summandrn potenzirt und die so erhaltenen Potenzen demnächst multiplizirt.

Zusatz. Aus diesem Satze geht auch hervor, wie Potenzen mit Potenzen multiplizirt werden, doch nur für den Fall, daß sie gleiche Dignanden haben. Man addirt die Exponenten und gibt diese Summe dem gleichen Dignanden zum Exponenten.

$$(a^m . a^n . a^o \ldots\ldots a^q)_r = a^{m+n+o+\ldots+q}{}_r.$$

Um einen Spezialfall anzuführen, so ist demnach

$$a^{m+n} = a^m . a^n \text{ und } a^m . a^n = a^{m+n}.$$

§ 30.

S. p. Z. Die Kombination $(a+b)^m$ oder $(a+b+c+\ldots\ldots+k_r)^m$ läßt sich erst auf einer späteren Stufe (beim binomischen und polynomischen Lehrsatze) realisiren; hier können wir blos zeigen, wie eine Summe von einer bestimmten Anzahl Summanden mit einer bestimmten Zahl potenzirt wird.

$(a+b)^2 = (a+b) . (a+b) = (a+b) . a + (a+b) . b = a^2 +$
$+ ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Oder für eine Summe von drei Summanden:

$(a+b+c)^2 = (a+b+c) . (a+b+c) =$
$= (a^2 + ab + ac) + (ab + b^2 + bc) + (ac + bc + c^2) =$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$

Oder:

$(a+b)^3 = (a+b) . (a+b) . (a+b)$. Es ist $(a+b) . (a+b) =$
$= a^2 + 2ab + b^2$. Dies mit $a+b$ multiplizirt gibt $=$
$(a^3 + 2a^2b + ab^2) + (a^2b + 2ab^2 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

§ 31.

Z. p. Prod. $a^{mn} = a^{m+m+m+\ldots\ldots+m_n} =$ (§ 29.) $a^m . a^m . a^m \times \ldots$
$\ldots \times (a^m)_n = (a^m)^n.$

Es ist aber mn = nm (§ 18. Zus. und § 23.) folglich

$$a^{mn} = a^{nm} = a^{n+n+n+\ldots\ldots+n_m} = (\S\ 29.)\ a^n \,.\, a^n \,.\, a^n \times \ldots\ldots \times$$
$$\times (a^n)_m = (a^n)^m .$$

Folglich

$$a^{mn} = a^{nm} = (a^m)^n = (a^n)^m .$$

Wörtlich: Eine Zahl wird mit einem Produkte potenzirt, wenn man sie mit einem der Faktoren des Produkts potenzirt und diese Potenz mit dem andern Faktor potenzirt.

§ 32.

Liest man die Gleichung im vorigen Satze umgekehrt, so ist der gegenwärtigen Kombination genügt, $(a^m)^n = a^{mn}$. Pot. p. Z.

Wörtlich: Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man den Exponenten der Potenz mit der Zahl multiplizirt.

Zusatz. Da $a^{mn} = a^{nm} = (a^m)^n = (a^n)^m$, so kann man in beliebiger Ordnung der Exponenten potenziren.

§ 33.

$$(abc \times \ldots\ldots \times k_\gamma)^m = (abc\ldots\ldots k_\gamma).(abc\ldots\ldots k_\gamma) \times \ldots\ldots\ldots \times (abc\ldots$$ Prod. p. Z.
$$\ldots k_\gamma)_m =$$
$$= (\S\ 23.)\,(aaa\ldots a_m).(bbb\ldots b_m).(ccc\ldots c_m) \times$$
$$\times \ldots \times (kkk\ldots k_m)_\gamma =$$
$$= a^m .\ b^m .\ c^m \times \ldots\ldots \times (k^m)_\gamma .$$

Wörtlich: Ein Produkt wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man jeden Faktor mit ihr potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplizirt.

§ 34.

Soll eine Potenz mit einer Potenz multiplizirt werden, so sind vier Fälle möglich: Pot. × Pot.

1) Die Potenzen haben gleiche Dignanden $a^m .\ a^n = a^{m+n}$. Der Fall ist § 29. Zus. erledigt.

2) Die Potenzen sind sich gleich $a^m . a^m = a^{m+m}$ (§ 29. Zus.) $= a^{m.2} = (a^m)^2$ (§ 31.)

3) Die Potenzen haben gleiche Exponenten $a^m . b^m = (ab)^m$. Der Fall wird durch § 33., wenn man ihn umgekehrt liest, erledigt.

4) Die Potenzen sind völlig ungleich, $a^m . b^n$. Hierfür ist kein anderer Ausdruck vorhanden.

§ 35.

Pot.+Pot.

Von den Kombinationen

Pot.+Z.	$a^m + b$
Pot.+S.	$a^m + b + d$
Pot.+Prod.,	$a^m + bc$
Pot.+Pot.	$a^m + a^m$
	$a^m + a^n$
	$a^m + b^m$
	$a^m + b^n$

läßt sich nur $a^m + a^m$ in $2a^m$ verwandeln.

§ 36.

Operationen des Gegensatzes. Differenz.

Setzen wir $a + b = c$, so lehrte die Addition aus den gegebenen Summanden a und b, c finden. Man kann sich aber auch die entgegengesetzte Aufgabe stellen, aus

1) c und b, a,

2) c und a, b,

d. h. aus der Summe (= c) und einem ihrer Summanden den andern zu finden.

Es möge also die Zahl, welche zu b addirt, c gibt, durch das Zeichen

$$c - b$$

und die Zahl, welche zu a addirt, c gibt, durch

$$c - a$$

bezeichnet werden. Das Zeichen $c - b$ möge eine Differenz, c der Minuend, b der Subtrahend genannt werden.

§ 37.

Wird aber verlangt, man solle b von a subtrahiren, so heißt das, man solle die Zahl denken, welche zu b addirt, a gibt. Symbolisch hat man die Operation dadurch vollzogen, daß man die Differenz Subtrahiren.

$$a - b$$

hinschreibt.

Zusatz. Obgleich die Addition ($a + b = c$) zwei Gegensätze hat, nämlich $c - b = a$ und $c - a = b$, so entstehen doch als Gegensatz der Addition nicht zwei Operationen, weil die Antwort auf eine Frage zugleich die Antwort auf die andere ist.

Der Grund liegt darin, daß $a + b = b + a$. Hieraus folgt aber auch, daß die Multiplikation nur eine ihr entgegengesetzte Operation haben wird, weil auch hier $ab = ba$.

Da aber a^m nicht nothwendig m^a ist, so wird sich später zeigen, daß das Potenziren zwei entgegengesetzte Operationen hat.

Anmerk. I. Die Differenz, obgleich aus zwei Elementen zusammengesetzt, Minuend und Subtrahend, ist doch, wie Summe, Produkt, Potenz, nur eine Zahl, nämlich die, welche zum Subtrahend addirt, den Minuend gibt.

Anmerk. II. Dieses Zeichen ist aber auch eindeutig, d. h. es gibt nur Eine Zahl der Zahlenreihe, welche der Differenz $q - p$ entspricht. Es sei nämlich $q - p = x$ und (angenommen es gäbe zwei Werthe für $q - p$) ebenfalls $= y$, so ist

$$q = p + x = p + y. \text{ (§ 36.)}$$

Wäre nun x eine andere Zahl als y, so wäre es $\lessgtr y$. Folglich auch (§ 9.)

$$p + x \lessgtr p + y,$$

welches dem Obigen widersprechen würde.

§ 38.

Aus der obigen Definition der Subtraktion ergeben sich unmittelbar folgende Grundgleichungen:

1) $(a - b) + b = a$; denn $a - b$ ist die Zahl, zu der b addirt, a gibt, und das ist hier geschehen.

2) $(a+b)-b=a$; denn $(a+b)-b$ ist diejenige Zahl, zu der b addirt $a+b$ gibt; diese Zahl ist aber a.

Diese Gleichungen lehren folglich

1) Zu einer Differenz den Subtrahenden addirt, gibt den Minuenden, oder:

Eine Zahl a bleibt dieselbe, wenn man eine Zahl b von ihr subtrahirt und demnächst wieder addirt.

2) Von einer Summe ein Summand subtrahirt, bleibt der andere, oder:

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn ich zuerst eine Zahl zu ihr addire und dieselbe demnächst von ihr wieder subtrahire.

Zusatz. Man kann noch eine dritte Grundgleichung annehmen:

$a-(a-b)=b$; denn $a-(a-b)$ ist die Zahl, welche zu $a-b$ addirt, a gibt; diese Zahl ist aber (s. Grundgleichung 1.) b.

Wörtlich: Eine Differenz von ihrem Minuenden subtrahirt, gibt den Subtrahenden; oder:

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn sie von einer zweiten Zahl und diese Differenz wieder von dieser zweiten Zahl subtrahirt wird.

Anmerk. In den obigen Gleichungen zeigt sich wieder, wann die Klammern auch bei Differenzen nothwendig sind; man braucht sie da, wo mit einer ganzen Differenz weiter operirt, d. h. zu der ganzen Differenz addirt, mit ihr multiplizirt, potenzirt, von ihr subtrahirt u. s. w. werden soll. Es ist z. B. ein großer Unterschied zwischen $(a-b)+m$ und $a-(b+m)$; $(a-b)m$ und $a-bm$; $(a-b)^m$ und $a-b^m$; $(a-b)-m$ und $a-(b-m)$.

Bemerk. In den folgenden §§. sind nur die nöthigen Kombinationen aufgestellt und gelöst; man wird aber wohlthun von dem Schüler alle hier möglichen Kombinationen aufstellen und die Lösung selbständig versuchen zu lassen. Wenn dabei die von uns gewählte Ordnung mit einer andern vertauscht wird, so ist es interessant zu sehen, wie viele Sätze, die hier als Ausgangspunkt angenommen werden, dem

Schüler als Folgerungen erscheinen und umgekehrt. Freilich werden sich für einige Kombinationen (D. p. Z.; Z. p. D.; S. p. D.; D. p. S. u. s. w.) hier noch keine Gleichungen finden lassen.

§ 39.

Es ist (§ 4) das $a > b$ so erklärt worden, daß a in der Reihe der steigenden Zahlen nach b folgt. Größer und Kleiner.

Diese Definition kann jetzt auch so ausgedrückt werden: a ist größer als b, wenn es noch eine Zahl, etwa m gibt, welche zu b addirt, a hervorbringt, so daß, wenn $a > b$, $a = b + m$ gibt, wo m weiter nichts als die Differenz $a - b$ ist.

§ 40.

Ungl. — Z.

Es sei

$$a > b$$

$$1)\ a - m = p,$$

$$2)\ b - m = q,$$

so folgt aus 1) daß $a = p + m$,

2) daß $b = q + m$.

Folglich, da $a > b$,

$$p + m > q + m,$$

woraus (nach § 9.) folgt, daß $p > q$ sein muß.

Folglich da $p = a - m$ und $q = b - m$,

$$a - m > b - m.$$

Wörtlich: Gleiches von Größerem und Kleinerem subtrahirt, läßt Größeres und Kleineres.

§ 41.

Z. — Ungl.

Es sei

$$a > b$$

$$1)\ m - a = p,$$

$$2)\ m - b = q,$$

so folgt aus 1) daß $m = a + p$,

2) daß $m = b + q$.

Also

$$a + p = b + q.$$

Da nun $a > b$, so muß $p < q$ sein (weil sich sonst nach § 5. und § 9. ein Widerspruch ergeben würde).

Wörtlich: Größeres und Kleineres von Gleichem subtrahirt, läßt Kleineres und Größeres und zwar, wo das Größere subtrahirt wird, Kleineres, und wo das Kleinere subtrahirt wird, Größeres.

§ 42.

Ungl.—Ungl. Wenn aber $a > b$

$$a - m > b - m \text{ (§ 40.); ist aber } m < n$$

$$b - m > b - n \text{ (§ 41.)}$$

folglich

$$a - m > b - n.$$

Wörtlich: Kleineres und Größeres von Größerem und Kleinerem subtrahirt, läßt Größeres und Kleineres.

§ 43.

D.+Z. Es fragt sich, was $(a - b) + m$ sein wird, auf einen andern Ausdruck gebracht. Um diesen andern Ausdruck zu finden, müssen wir eine andere Vollstreckung der in $(a - b) + m$ enthaltenen Operationen suchen. Dieser Ausdruck ist eine Summe, deren erster Summand aber eine Differenz ist. Wie Zahl zur Zahl oder zur Summe addirt wird, wissen wir wohl, aber wir haben hier eine Zahl zu einer Differenz zu addiren. Könnten wir nun die Differenz in eine einfache Zahl verwandeln, d. h. die Subtraktion aus ihr fortschaffen, so möchte sich der gesuchte Ausdruck leichter finden lassen.

$$(a - b) + m = x$$
$$b = b$$

$$((a - b) + m) + b = x + b$$
$$((a - b) + b) + m = x + b \text{ (§ 8.)}$$

Um auf der linken Seite dieser Gleichung die Subtraktion wegzuschaffen, addiren wir b; um aber die Gleichung unverletzt zu erhalten (§ 5.) thun wir rechts dasselbe.

$$a + m = x + b. \text{ (§ 38.)}$$
$$b = b.$$

$$(a + m) - b = x.$$

Subtrahiren wir jetzt, um das x von dem durch Addition mit ihm verbundenen b zu befreien, dieses b auf beiden Seiten (§ 38. № 2.)

Folglich $(a - b) + m = (a + m) - b.$

Wörtlich: Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man die Zahl zum Minuenden addirt und von dieser Summe den Subtrahenden subtrahirt. (Eine zweite Lösung § 49. Zusatz. II.)

§ 44.

Aus dem vorigen Satz folgt umgekehrt gelesen s—z.
$(a+m)-b=(a-b)+m$.

Nun ist aber $(a+m)-b=(m+a)-b=$ (§ 43.) $(m-b)+a=$ (§ 8.) $a+(m-b)$.

Also:

$$(a+m)-b=\begin{cases}(a-b)+m\\(m-b)+a\\a+(m-b).\end{cases}$$

Wörtlich: Von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, wenn man die Zahl von einem der Summanden, gleichviel von welchem, subtrahirt, und zu dieser Differenz den andern Summanden addirt. (Eine zweite Lösung § 49. Zusatz I.)

§ 45.

Aus dem vorigen Satze folgt auch, wie eine Differenz z+d. zu einer Zahl addirt wird $a+(m-b)=(a+m)-b=(a-b)+m$.

Wörtlich: Zu einer Zahl wird eine Differenz addirt, wenn man entweder den Minuenden der Differenz zu ihr addirt und von dieser Summe den Subtrahenden subtrahirt, oder aber, wenn man den Subtrahenden der Differenz von der Zahl subtrahirt und zu dieser Differenz demnächst den Minuenden der zu addirenden Differenz addirt.

§ 46.

Anmerk. Wir haben die §§. 43., 44., 45. analytisch, heuristisch, entwickelnd behandelt. Statt aber die Gleichheit zweier Ausdrücke auf analytischem, progressivem Wege zu finden, kann man sie auch voraussetzen, behaupten, und dann handelt es sich darum, auf synthetischem, regressivem Wege diese Gleichheit zu beweisen. Einen Satz beweisen, heißt aber in der Mathematik nichts andres, als nachweisen, daß er einem entweder unmittelbar als wahr geltenden oder schon früher als wahr erwiesenen Satze identisch ist.

Gesetzt, es sollte bewiesen werden, daß $x = y$, wenn beide Ausdrücke Zahlenverbindungen sind.

Man betrachte beide Ausdrücke und sehe zu, welcher von beiden am einfachsten ist oder am bequemsten einfach gemacht werden kann. Man überlege nun, welches Element — etwa β — durch welche Operation — etwa Op. γ — mit ihm verbunden werden muß, damit er ganz einfach wird. Gesetzt nun, der Ausdruck x (eine Zahlenverbindung) gäbe, mit β durch die Operation γ verbunden (wir wollen dies durch

$$x\left|\begin{array}{l}\beta\\ \hline \text{Op. }\gamma\end{array}\right.$$

bezeichnen), den einfachen Ausdruck k. Man wird nun offenbar versucht zu sehen, ob auch $y\left|\begin{array}{l}\beta\\ \hline \text{Op. }\gamma\end{array}\right.$, d. h. y mit β durch die Operation γ verbunden, $= k$ wird. Ist dies der Fall; ist

$$x\left|\begin{array}{l}\beta\\ \hline \text{Op. }\gamma\end{array}\right. = y\left|\begin{array}{l}\beta\\ \hline \text{Op. }\gamma\end{array}\right.$$

und wendet man nun wieder die der Operation γ entgegengesetzte Operation an, um das mit x und y verbundene fremde Element β wieder daraus zu entfernen, so ist offenbar

$$x = y.$$

Wir wollen größerer Deutlichkeit halber den § 43. synthetisch beweisen.

Es sei

$(a-b)+m=(a+m)-b$ $b=b$	Die rechte Seite dieser vermutheten Gleichung ist eine Differenz und als solche die Zahl, welche zu b addirt, $a+m$ gibt. Addire ich denn b auf beiden Seiten.
$(a-b)+m+b=a+m$	
$(a-b)+b+m=a+m$	(§ 8.)
$a+m=a+m$ $b=b$	(§ 38. №. 1.) Schaffen wir nun das mit beiden Seiten der vermutheten Gleichung durch Addition verbundene Element b durch die der Addition entgegengesetzte Operation fort.
$(a+m)-b=(a+m)-b$	

d. h. die Ausdrücke sind identisch und die obige Gleichung war richtig. Wir gehen nun weiter und bemerken noch, daß man wohl thun wird, hinfort alle auf analytischem Wege gefundenen Sätze demnächst auf synthetischem Wege demonstriren zu lassen. So werden die Vortheile der beiden Methoden vereinigt.

§ 47.

Z.—S.

$$\begin{array}{rl} a-(b+c) & = x \\ b+c & = b+c \\ \hline a & = x+b+c \end{array}$$

Die linke Seite der Gl. ist Diff. (§ 38.)

Schaffen wir nun das auf beiden Seiten durch Addition verbundene b+ +c fort.

Da aber (§ 8.) b+c = c+b, so kann dies (§ 38. № 2.) auf zweierlei Art geschehen.

$$\begin{array}{rl} c & = c \\ \hline a-c & = x+b \\ b & = b \\ \hline (a-c)-b & = x \end{array}$$

1) Zuerst c, dann b subtr.

Oder: 2) Zuerst b, dann c subtr.

Es war

$$\begin{array}{rl} a & = x+b+c = x+c+b \\ b & = b \\ \hline a-b & = x+c \\ c & = c \\ \hline (a-b)-c & = x. \end{array}$$

Folglich:

$$a-(b+c) = (a-b)-c = (a-c)-b.$$

Wörtlich: Von einer Zahl wird eine Summe subtrahirt, wenn man einen der Summanden, gleichviel welchen, von der Zahl subtrahirt und von dieser Differenz den andern Summanden subtrahirt.

§ 48.

Aus dem vorigen Satze folgt auch dieses: D.—Z.

Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, wenn man diese Zahl zum Subtrahenden der Differenz addirt und diese Summe von dem Minuenden der Differenz subtrahirt: $(a-b)-c = a-(b+c.)$ Oder:

Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, wenn man diese Zahl vom Minuenden der Differenz subtrahirt und von dieser neuen Differenz den Subtrahenden der alten Differenz subtrahirt: $(a-b)-c = (a-c)-b.$

Zusatz. Wir wollen von den drei Gleichungen der §§. 47. 48. zwei noch synthetisch erweisen. Es sei

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= (a-b)-c \\ b+c &= b+c \\ \hline a &= \big((a-b)-c\big)+b+c= \\ &= \big((a-b)-c\big)+c+b= \quad (\S\ 38.) \\ &= (a-b)+b= \\ &= a. \\ b+c &= b+c \\ \hline a-(b+c) &= a-(b+c). \end{aligned}$$

Nun das mit beiden Ausdrücken durch Addition verbundene Element $b+c$ wieder durch Subtraktion entfernt.

§ 49.

Z -D.

$$\begin{aligned} a-(b-c) &= x. \\ b-c &= b-c \\ \hline a &= x+(b-c)= \\ &= (b-c)+x= \\ &= (x+b)-c \\ c &= c \\ \hline a+c &= x+b \\ b &= b \\ \hline (a+c)-b &= x. \end{aligned}$$

Linke Seite ist Differenz (§ 38.)

(§ 43.)

Rechte Seite ist Differenz (§ 38. Nö. 2.)

Befreien das x von b.

Folglich $a-(b-c)=(a+c)-b=(a-b)+c$ (§ 43.)

Wörtlich: Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahirt, indem man entweder 1) den Subtrahenden der Differenz zu der Zahl addirt und von dieser Summe den Minuenden subtrahirt; oder aber 2) indem man den Minuenden der Differenz von der Zahl subtrahirt und zu dieser Differenz den Subtrahenden addirt.

Zusatz I. Umgekehrt gelesen gibt dieser § noch eine Lösung der Kombination S—Z (§ 44.), so daß demnach

$$(a+c)-b=\begin{cases} a-(b-c) & (\S\ 49.) \\ (a-b)+c & (\S\ 44 \text{ und } 49.) \\ a+(c-b) & (\S\ 44.) \end{cases}$$

Wörtlich heißt diese neue Lösung: Von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, wenn man einen der Sum-

manden von dieser Zahl subtrahirt und diese Differenz von dem andern Summanden subtrahirt. (Vgl. § 44.)

Zusatz II. Ebenfalls liegt darin eine neue Lösung der Kombination D+Z (§ 43.), so daß demnach

$$(a-b)+c=\begin{cases}(a+c)-b & (\S\ 43 \text{ und } 49.)\\ a+(c-b) & (\S\ 44.)\\ a-(b-c) & (\S\ 49.)\end{cases}$$

Wörtlich heißt diese neue Lösung: Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, wenn man die Zahl vom Subtrahenden der Differenz subtrahirt und diese neue Differenz vom Minuenden der alten Differenz subtrahirt. (Vgl. § 43.)

Zusatz III. Synthetischer Beweis.

A. Es sei

$$\begin{array}{l} a-(b-c)=(a+c)-b \\ \quad b-c = b-c \\ \hline \quad a = ((a+c)-b)+b-c= \quad (\S\ 38.) \\ \quad\;\; = (a+c)-c= \\ \quad\;\; = a. \\ \quad b-c = b-c \\ \hline a-(b-c)=a-(b-c). \end{array}$$

d. h. die Gleichung war richtig

B. Es sei

$a-(b-c)=(a-b)+c$ u. s. w. u. s. w.

§ 50.

$$\begin{aligned}(a+b)-(c+d)&=((a+b)-c)-d= \quad (\S\ 47.)\\ &=((a-c)+b)-d= \quad (\S\ 44.)\\ &=(a-c)+(b-d). \quad (\S\ 44.)\end{aligned}$$ S—S.

Wörtlich: Eine Summe wird von einer Summe subtrahirt, wenn man der Reihe nach den ersten Summanden der Summe-Subtrahend von dem ersten Summanden der Summe-Minuend subtrahirt, alsdann den zweiten respektive vom zweiten u. s. w. und die Differenzen addirt.

§ 51.

Dieser Satz lehrt demnach umgekehrt gelesen die Addition von Differenzen: D+D.

$$(a-c)+(b-d)=(a+b)-(c+d).$$

Wörtlich: Differenzen werden addirt, indem man die Summe der Subtrahenden von der Summe der Minuenden subtrahirt.

Dieser Satz, welcher § 50 und 51 für zwei Summen und zwei Differenzen gültig gefunden wurde, ist aber als allgemein wahr zu erweisen.

Es sei

$(a-b)+(c-d)+(e-f)+\ldots\ldots+(\alpha-\beta)_n=(a+c+e+\ldots\ldots+$
$+\alpha)_n-(b+d+f+\ldots\ldots+\beta)_n$.

Addiren wir noch eine Differenz. $\gamma-\delta$, so haben wir
$(a-b)+(c-d)+(e-f)+\ldots\ldots+(\alpha-\beta)_n+(\gamma-\delta)=(a+c+$
$+e+\ldots\ldots+\alpha)_n-(b+d+f+\ldots\ldots+\beta)_n+(\gamma-\delta)$.

Wenden wir nun auf die rechte Seite dieser Gleichung den schon bewiesenen Satz von der Summe zweier Differenzen an, so ist, statt $(a+c+e+\ldots\ldots+\alpha)$, q und statt $(b+d+f+$
$+\ldots\ldots+\beta)$, s gesetzt:
$(q-s)+(\gamma-\delta)=(q+\gamma)-s+\delta$, und nun q und s wieder vertauscht,
$(a+c+e+\ldots\ldots+\alpha+\gamma)-(b+d+f+\ldots\ldots+\beta+\delta)$.

Wäre demnach der Satz für m Differenzen gültig, so gilt er auch für $m+1$, ist $m+1=n$, so gilt er auch für $n+1$, wenn $n+1=o$, so gilt er auch für $o+1$, d. h. er gilt allgemein.

§ 52.

D-D. $(a-b)-(c-d)=((a-b)+d)-c=$ (§ 49)
$=(a-b)+(d-c)=$ (§ 44.)
$=(a+d)-(b+c)$. (§ 51.)

Wörtlich: Von einer Differenz wird eine Differenz subtrahirt, wenn man 1) die Differenz-Subtrahend umkehrt und in ihrer neuen Gestalt zur Differenz-Minuend addirt; oder 2) wenn man von der Summe des Minuenden aus Differenz-Minuend und des Subtrahenden aus Differenz-Subtrahend die Summe des Subtrahenden aus Differenz-Minuend und des Minuenden aus Differenz-Subtrahend subtrahirt.

Zusatz. Hieran schließen sich noch folgende Sätze:

1) $(a+m)-(b+m)=\{(a+m)-m\}-b=$ (§ 47.)
$=a-b.$

Also

$a-b=(a+m)-(b+m.)$

Wörtlich: Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man die nämliche Zahl zum Minuenden und Subtrahenden addirt.

2) $(a-m)-(b-m)=\{(a-m)+m\}-b=$ (§ 49.)
$=a-b.$

Also

$a-b=(a-m)-(b-m).$

Wörtlich: Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man die nämliche Zahl von Minuend und Subtrahend subtrahirt.

§ 53.

$$(a-b).m=(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots\ldots+(a-b)_m= \text{D.}\times\text{Z.}$$
$$=(a+a+a+\ldots+a_m)-(b+b+b+\ldots+b_m)=$$
(§ 51.)
$$=am-bm.$$

Synthetisch:

$(a-b).m=am-bm$
$bm=bm$ Addirt

$\{(a-b).m\}+bm=am$
$\{(a-b)+b\}.m=am$ (§ 17 Zus.)
$am=am$ (§ 38.)
$bm=bm.$ Subtrahirt

$am-bm=am-bm,$ d. h. die Gleichung war richtig.

Wörtlich: Eine Differenz wird mit einer Zahl oder eine Zahl mit einer Differenz multiplizirt, wenn man das Produkt des Subtrahenden mit der Zahl von dem Produkt des Minuenden mit der Zahl subtrahirt.

Anmerk. Für D.$\times$S gilt natürlich dasselbe: $S=m+n$
$(a-b).S=aS-bS=a(m+n)-b(m+n)=$
$=(am+an)-(bm+bn).$

§ 54.

Prod.—Prod. Liest man die obige Gleichung umgekehrt, also

$$am - bm = (a - b)m,$$

so löst sie die gegenwärtige Kombination, doch nur für den Fall, daß Minuend und Subtrahend einen Faktor gemeinschaftlich haben. Man subtrahirt die ungleichen Faktoren und multiplizirt die Differenz mit dem gemeinsamen Faktor.

§ 55.

D.×D.

$$(a-b).(c-d) = (a-b)c - (a-b)d =$$
$$= (ac - bc) - (ad - bd) = \quad (\S\ 53.)$$
$$= (ac + bd) - (bc + ad). \quad (\S\ 52.)$$

Wörtlich: Eine Differenz wird mit einer zweiten multiplizirt, wenn man von der Summe der Produkte des Minuenden mit dem Minuenden und des Subtrahenden mit dem Subtrahenden die Summe der Produkte von Subtrahend der ersten und Minuend der zweiten und von Minuend der ersten und Subtrahend der zweiten Differenz subtrahirt.

Anmerk. I. Für die Kombinationen der Differenz mit der Potenz lassen sich erst bei der Division und auf noch höheren Stufen Gleichungen finden.

Anmerk. II. Man könnte kürzer, aber dann nicht so übersichtlich im Einzelnen sämmtliche Sätze von der Subtraktion als Anwendung und Folgerung der beiden Kombinationen D+Z und Z—D darstellen. Hätte man nämlich

$$(p-q)+s = \begin{cases} (p+s)-q \\ p+(s-q) \\ p-(q-s) \end{cases}$$

$$(p-q)-s = \begin{cases} (p-s)-q \\ p-(q+s) \end{cases}$$

gezeigt, so folgten alle anderen Sätze daraus.

Anmerk. III. Es bedarf wol kaum gesagt zu werden, daß man beim wirklichen Unterrichte neben dieser rein formellen Entwickelung, d. h. nach der Analyse und Synthese, noch eine dritte mehr raisonnirende Weise die Gleichungen hervorzubringen anzuwenden hat. Stände man z. B. bei dem Satze D—Z.

$$(a-b)-c,$$

so raisonnirt der Schüler also: Von a soll b subtrahirt werden und von

dieser Differenz noch c; d. h. von a soll $b+c$ subtrahirt werden; folglich $(a-b)-c=a-(b+c)$.

Man wird wohl thun, den Schüler jeden Satz auch in dieser Weise behandeln zu lassen.

§ 56.

Setzen wir $ab=c$, so lehrte die Multiplikation aus den gegebenen Faktoren a und b, c zu finden. Man kann sich aber auch die entgegengesetzte Aufgabe stellen, aus Quotient.

1) c und b, a

2) c und a, b, d. h.

aus dem Produkt ($=c$) und einem seiner Faktoren (a oder b) den andern Faktor zu finden.

Es möge also die Zahl, welche (in der Gleichung $ab=c$) mit b multiplizirt c gibt, durch das Zeichen

$$\frac{c}{b} \text{ oder } c:b,$$

und die Zahl, welche mit a multiplizirt c gibt, durch

$$\frac{c}{a} \text{ oder } c:a$$

bezeichnet werden. Das Zeichen $\frac{c}{a}$ oder $c:a$ möge ein Quotient, c der Dividendus und a der Divisor des Quotienten genannt werden.

§ 57.

Wird aber verlangt, man solle a durch m dividiren, so heißt das, man solle die Zahl denken, welche mit m multiplizirt, a gibt. Symbolisch hat man die Operation der Division dadurch vollzogen, daß man den Quotienten Dividiren.

$$\frac{a}{m} \text{ oder } a:m$$

hinschreibt.

Zusatz. Warum die Multiplikation nicht zwei Gegensätze hat, ist § 37. Zus. gesagt und hat in dem $ab=ba$ seinen Grund.

Anmerk. I. Da $\frac{a}{m}$ oder $a:m$ trotz des zusammengesetzten Zeichens nur eine Zahl bedeutet, so muß man auch die Quotienten, wenn mit ihnen weiter gerechnet werden soll, d. h. wenn sie mit andern Zahlen in Verbindung treten, damit sie als solche kenntlich bleiben, in Klammern einschließen.

Anmerk. II. Der Quotient $\frac{a}{m}$ bezeichnet die Zahl, welche m mal genommen a gibt. Folglich muß, wenn ein solcher Ausdruck eine Bedeutung haben soll, $a > m$ und zwar ein Vielfaches von m, etwa

$$a = 2m \text{ oder } 3m \text{ oder } 4m \text{ oder } km \text{ u. s. w.}$$

sein *).

Anmerk. III. Dieses Zeichen ist aber auch eindeutig, d. h. es gibt nur Eine Zahl der Zahlenreihe, welche dem Quotienten entspricht. Denn es sei $\frac{q}{p} = x$ und (angenommen es gäbe zwei Werthe für $\frac{q}{p}$) ebenfalls $\frac{q}{p} = y$, so folgt aus der Definition

$$q = p.x.$$
$$q = p.y.$$

Wäre aber $x \gtrless y$, so müßte auch (§ 16.) $px \gtrless py$ sein, was der obigen Annahme wiederspricht.

§ 58.

Aus der obigen Definition der Division ergeben sich unmittelbar folgende Grundgleichungen:

---

*) Der Lehrer kann diese Voraussetzung, sobald er die Sätze von der Division beendigt, auch einmal fallen lassen und gleich unmittelbar, ehe er zum zweiten Kapitel kommt, welches von den Operationen mit bloßen Rechnungsformen handelt, die sämmtlichen Sätze von der Division, als ebenfalls die Bruchrechnung in sich schließend, behandeln. Der Schüler faßt leicht, daß es ganz einerlei ist, ob er mit $\frac{12}{4}$ oder $\frac{4}{12}$ rechnet, ob er $\left[\frac{\frac{12}{4} + \frac{15}{3}}{\frac{12}{4} \times \frac{15}{3}} \text{ oder } \frac{\frac{4}{12} + \frac{3}{15}}{\frac{4}{12} \times \frac{3}{15}}\right]$ vor sich hat.

Hier aber kann nicht ausdrücklich von Quotienten, deren Dividenden $<$ Divisor, d. h. von Brüchen, geredet werden, weil dieses Kapitel von wirklichen Zahlen handelt und dem zweiten Kapitel die bloßen Rechnungsformen (negative Zahlen, Brüche, imaginäre u. s. w.) angehören.

1) $\left(\frac{a}{b}\right).b = a$; denn a:b ist die Zahl, welche mit b multiplizirt, a gibt und das ist hier geschehen.

2) $\frac{ab}{b} = a$; denn ab:b ist die Zahl, welche mit b multiplizirt ab gibt; diese Zahl aber ist a.

Ebenso $\frac{ab}{a} = b$.

Diese Gleichungen lehren folglich:

1) Ein Quotient mit seinem Divisor multiplizirt, gibt den Dividendus; oder

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn man sie erst durch eine Zahl dividirt und demnächst wieder mit derselben Zahl multiplizirt.

2) Ein Produkt, durch einen Faktor dividirt, gibt den andern; oder

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn man sie erst mit einer Zahl multiplizirt und demnächst wieder mit derselben Zahl dividirt.

Zusatz. Man kann noch eine dritte Grundgleichung annehmen: $\frac{a}{a:b} = b$; denn $\frac{a}{a:b}$ ist die Zahl, welche mit a:b multiplizirt a gibt; mit $\frac{a}{b}$ muß ich aber b multipliziren, um a zu bekommen.

Wörtlich: Wenn man einen Quotienten in seinen Dividenden dividirt, so erhält man den Divisor; oder:

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn durch sie in eine zweite Zahl und durch diesen Quotienten wieder in dieselbe zweite Zahl dividirt wird.

Bemerk. Man findet in den folgenden §§. nur diejenigen Kombinationen, welche etwas Neues lehren; die Schüler werden wohl thun, andre Anordnungen und als Folge hiervon andre Lösungen zu versuchen. Vgl. § 38. Bemerk.

§ 59.

Es sei $a > b$ und $\frac{a}{m} = p$ und $\frac{b}{m} = q$, so ist Ungl. div. Z.

1) $a = p.m$ (§ 56.)

2) $b = q.m$.

und da $a > b$, auch $pm > qm$. Folglich (§ 16.) $p > q$, d. h.

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}.$$

Wörtlich: Größeres und Kleineres durch Gleiches dividirt, gibt Größeres und Kleineres.

§ 60.

Gleich. div. Ungl.

Es sei $a > b$, und $\frac{m}{a} = p$, und $\frac{m}{b} = q$, so ist

1) $m = p . a$
2) $m = q . b$

also $pa = qb$.

Da aber $a > b$, $ap = bq$, so muß $p < q$, d. h. es muß

$$\frac{m}{a} < \frac{m}{b}$$

sein.

Wörtlich: Gleiches durch Größeres und Kleineres dividirt, gibt, wo durch das Größere dividirt ist, Kleineres und, wo durch das Kleinere dividirt ist, Größeres.

§ 61.

Ungl. div. Ungl.

Wenn aber $a > b$ und $m < n$, so ist

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m} \text{ und } \frac{b}{m} > \frac{b}{n},$$

folglich

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{n}.$$

Wörtlich: Größeres und Kleineres durch Kleineres und Größeres dividirt, gibt Größeres und Kleineres.

§ 62.

Q ± Q.

Wie addirt oder subtrahirt man Quotienten von Quotienten?

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = x$$
$$b = b$$

Wir haben links eine S. deren Summanden aber Quotienten sind. Wir schaffen die Division durch Multiplikation fort (§ 58. № 1.), multipliziren aber die ganze Summe (§ 17.) oder Differenz (§ 53.), damit bei x dasselbe geschehen könne.

$$a \pm \left(\frac{c}{d}\right) . b = xb$$
$$d = d$$

$$ad \pm bc = xbd$$
$$bd = bd$$

Befreien das x von bd (§ 58. № 2.)

$$\frac{ad \pm bc}{bd} = x.$$

Also

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Synthetisch. Es sei

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$
$$bd = bd$$

Die rechte Seite dieser vermutheten Gleichung erscheint am einfachsten. Sie ist Quotient und gibt, mit bd multiplizirt, den Dividenden. Sehen wir, ob dasselbe Resultat auf der linken Seite kommt.

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) bd = ad \pm bc$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) bd \pm \left(\frac{c}{d}\right) bd = ad \pm bc$$ (§ 17. und 53.)

$$ad \pm cb = ad \pm bc$$ (§ 58. № 1.) Nun mit bd wieder div.

$$bd = bd$$

$$\frac{ad \pm bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$ d. h. die Gleichung war richtig.

Wörtlich: Zu einem Quotienten wird ein Quotient addirt oder von ihm subtrahirt, wenn man die Summe oder Differenz der Produkte aus dem Dividenden des ersten und Divisor des zweiten und aus dem Dividenden des zweiten und Divisor des ersten Quotienten durch das Produkt der Divisoren beider Quotienten dividirt.

§ 63.

Wie werden Quotienten von gleichen Divisoren zu einander addirt oder von einander subtrahirt? Nach § 62. ist (Erster Spezialfall. $Q \pm Q$.)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

also ist, wenn $b = d$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{ab \pm bc}{bb} = \text{(§ 17. Zus. und 54.)}$$
$$= \frac{(a \pm c)b}{bb} = \text{(§ 58.)}$$
$$= \frac{a \pm c}{b}.$$

Also

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Wörtlich: Quotienten von gleichen Divisoren werden zu einander addirt oder von einander subtrahirt, wenn man die

Summe oder Differenz der Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

§ 64.

S. oder D. div. Z.

Umgekehrt gelesen

$$\frac{a \pm c}{b} = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}$$

heißt der vorige Satz wörtlich: Summen oder Differenzen werden durch eine Zahl dividirt, wenn man jedes Glied des Ausdrucks durch die Zahl dividirt und die Quotienten addirt oder subtrahirt.

§ 65.

Zweiter Spezialfall. $Z. \pm Q.$

Da $a = \frac{ad}{d}$ (§ 58.), so ist

$$a \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{d} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm c}{d}. \text{ (§ 63.)}$$

Wörtlich: Zu einer Zahl wird ein Quotient addirt oder von ihr subtrahirt, wenn wir sie mit dem Divisor des Quotienten multiplizіren, zu diesem Produkt den Dividenden des Quotienten addiren oder ihn davon subtrahiren, und die Summe oder Differenz durch den Divisor des Quotienten dividiren.

§ 66.

Umgekehrt gelesen liegt in diesem Satze das Gesetz für das praktische Dividiren. Im vorigen § wurde aus $a + \frac{c}{d}$, $\frac{ad+c}{d}$; im Praktischen soll aus $\frac{ad+c}{d}$ wieder $a + \frac{c}{d}$ werden, d. h. man soll einen Quotienten $\frac{A}{B}$ gleich einer Summe machen.

Setzen wir den einen Summanden dieser gesuchten Summe gleich m, so reduzirt sich die Aufgabe auf folgende: man soll einen Ausdruck finden, der zu m addirt $\frac{A}{B}$ gibt.

Setzen wir diesen Ausdruck vorläufig $=x$, so ist $\frac{A}{B}=$ $m+x$. Es handelt sich nun darum, das x zu bestimmen.

$$\frac{A}{B} = m+x.$$
$$B = B.$$
$$A = (m+x)B =$$
$$= mB+xB \ (\S\ 17.)$$
$$mB = mB$$
$$A-mB = xB$$
$$B = B$$
$$\frac{A-mB}{B} = x.$$

Also

$$\frac{A}{B} = m+\frac{A-mB}{B}.$$

Wörtlich: Ein Quotient A:B wird in eine Summe von zwei Summanden verwandelt, wenn man den ersten Summanden ganz beliebig nimmt, etwa m, dann aber den zweiten dadurch findet, daß man diesen ersten m mit dem Divisor B multiplizirt, dieses Produkt mB von dem Dividendus A subtrahirt und diese Differenz A—mB wieder durch den Divisor B dividirt.

§ 67.

Die Kombination Q. + Z. ist in § 65. erledigt, weil $a+\frac{b}{c}=\frac{b}{c}+a$. Dritter Spezialfall. Q. ± Z.

Da

$$c = \frac{bc}{b} \ (\S\ 58.),$$

so ist

$$\frac{a}{b} - c = \frac{a}{b} - \frac{bc}{b} = (\S\ 63.)\ \frac{a-bc}{b}.$$

Also

$$\frac{a}{b} - c = \frac{a - bc}{b}.$$

Wörtlich: Von einem Quotienten wird eine Zahl subtrahirt, wenn man das Produkt der Zahl mit dem Divisor des Quotienten von dem Dividenden des Quotienten subtrahirt und die Differenz durch den Divisor dividirt.

Anmerk. Alle diese Spezialfälle konnten auch als Hauptfälle entwickelt werden. Es zu thun hat für den Schüler keine Schwierigkeit.

1) (§ 63.) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = x$

$$b = b$$

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}\right) b = xb$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) . b \pm \left(\frac{c}{b}\right) b = xb$$

$$a \pm c = xb$$

$$b = b$$

$$\frac{a \pm c}{b} = x.$$

Oder derselbe Satz synthetisch, als Beweis für § 64.

$$\frac{a \pm c}{b} = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}$$

$$b = b$$

$$a \pm c = \left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}\right) b$$

$$= \frac{a}{b} . b \pm \frac{c}{b} . b =$$

$$= a \pm c$$

$$b = b$$

$$\frac{a \pm c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

2) (§ 65.) $a \pm \frac{c}{d} = x$

$$d = d$$

$$ad \pm c = xd$$

$$d = d$$

$$\frac{ad \pm c}{d} = x.$$

3) (§ 67.) $\frac{a}{b} - c = x$

$$b = b$$

$$a - bc = xb$$

$$b = b$$

$$\frac{a - bc}{b} = x.$$

Oder synthetisch u. s. w.

§ 68.

Wie multiplizirt man Quotienten mit Quotienten? Q.×Q.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = x.$$

$b = b$ (Produkte werden multiplizirt § 18.)

$$a \cdot \frac{c}{d} = x \cdot b$$

$d = d$ (§ 18.)

$$a \cdot c = x \cdot b \cdot d$$

$$bd = bd$$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = x.$$

Synthetisch:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$bd = bd$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) bd = ac$$

$\frac{a}{b} . b . \frac{c}{d} . d = ac$ (Man kann in belieb. Ordnung multiplizíren § 23.)

$a . c = ac$ (§ 58.)

$$bd = bd$$

$\frac{a . c}{b . d} = \frac{ac}{bd}$, d. h. die Gleichung war richtig.

Wörtlich: Quotienten werden mit einander multiplizirt, indem man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividirt.

Anmerk. als Beispiel der raisonnirenden Auflösung (Vgl. § 55. Anmerk. III.)

Wenn $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ multiplizirt werden soll, so heißt das, man solle den bten Theil von a, nicht c mal, sondern ihn den dten Theil von c mal nehmen.

Nehmen wir den bten Theil von a cmal, so haben wir den bten Theil von ac, also $\frac{ac}{b}$.

Wir sollten aber nur den dten Theil von c nehmen, haben also dmal zu viel genommen. Um dies auszugleichen, dividiren wir $\frac{ac}{b}$ durch d und erhalten so, da es einerlei ist, ob ich erst von ac den bten und hiervon wieder den dten oder ob ich auf einmal den bdten Theil von ac nehme, $\frac{ac}{bd}$. Dies wird noch klarer durch die folgenden Spezialfälle.

§ 69.

Prod. div. Prod.

Der vorige Satz umgekehrt gelesen,

$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ (aber auch wegen § 23. $= \frac{a}{d} \times \frac{c}{b}$)

löst die gegenwärtige Kombination.

Wörtlich: Ein Produkt wird durch ein Produkt dividirt, wenn man einen Faktor des Produkts-Dividend durch einen Faktor des Produkts-Divisor, dann einen zweiten durch einen zweiten 2c. dividirt und die erhaltenen Quotienten mit einander multiplizirt.

§ 70.

Spezialfall. Z.×Q. Q.×Z.

Setzt man $a = \frac{ab}{b}$, so ist

$$a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ab}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{abc}{bd} = \frac{ac}{d} \text{ (§ 58.)},$$

oder $d = \frac{dm}{m}$, so wird

$$\frac{a}{b} \cdot d = \frac{a}{b} \cdot \frac{dm}{m} = \frac{adm}{bm} = \frac{ad}{b} \text{ (§ 58.)}$$

Synthetisch:

$$\begin{array}{rcl} a \cdot \frac{c}{d} & = & \frac{ac}{d} \\ d & = & d \\ \hline a \cdot c & = & ac \\ d & = & d \\ \hline \frac{ac}{d} & = & \frac{ac}{d}. \end{array}$$

Nun ist auch, weil

$$1)\ a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} = \frac{ca}{d}$$

$$2)\ \frac{ca}{d} = c \cdot \frac{a}{d}$$

$$a \cdot \frac{c}{d} = c \frac{a}{d}.$$

Wörtlich: Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man den Dividenden mit ihr multiplizirt und das Produkt durch den Divisor dividirt.

§ 71.

Daraus folgt auch: Prod. div. Z

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man einen der Faktoren, gleichviel welchen, durch sie dividirt und diesen Quotienten mit dem andern Faktor multiplizirt.

§ 72.

Wie dividirt man Quotienten durch Quotienten? Q. div. Q.

Wir haben hier links einen Quotient, dessen Dividend und Divisor wieder Quotienten sind. Schaffen wir die Division nach und nach fort.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = x \cdot \frac{c}{d} =$$

$$= \frac{xc}{d}\ (\S\ 70.)$$

$$b = b$$

$$a = \frac{xcb}{d}$$

$$d = d$$

$$ad = xcb.$$

Das x von bc befreien (§ 58.)

$$bc = bc$$

$$\frac{ad}{bc} = x.$$

Andrer Weg:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . x$$

$$b = b$$

$$a = b . \frac{c}{d} . x$$

$$a = \left(\frac{bc}{d}\right) x \qquad (\S\ 18.\ \text{und}\ 70.)$$

$$a = \left(\frac{cb}{d}\right) x.$$

$$a = c\left(\frac{b}{d} . x\right) \quad (\S\ 71.)$$

$$c = c \qquad \text{divid.}\ (\S\ 58.\ \text{№}\ 2.)$$

$$a : c = \frac{b}{d} . x$$

$$b : d = b : d \qquad \text{Nun x befreien.}$$

$$\frac{a:c}{b:d} = x.$$

Also

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a:c}{b:d}.$$

Wörtlich: Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man

1) das Produkt des Dividendus im Quotient-Dividendus mit dem Divisor im Quotient-Divisor durch das Produkt des Divisors im Quotient-Dividendus mit dem Dividendus im Quotient-Divisor dividirt. (Oder auch: wenn man den Quotient-Divisor umstellt und alsdann multiplizirt.) Oder

2) den Dividenden des Quotient-Dividendus durch den Dividenden des Quotient-Divisor dividirt und diesen Quotienten durch den Quotienten dividirt, welcher entsteht, wenn man den Divisor des Quotient-Dividendus durch den Divisor des Quotient-Divisor dividirt.

§ 73.

Setzt man $c = \frac{cd}{d}$, so ist — Erster Spezialfall. Q. div. Z.

1) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{cd}{d} = \frac{ad}{bcd}$ (§ 72. №. 1.) $= \frac{a}{bc}$ (§ 58.)

2) $\frac{a:b}{c} = \frac{a:c}{b}$ (weil $bc = cb$).

Wörtlich: Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man

1) den Dividendus durch das Produkt des Divisors mit der Zahl dividirt; oder
2) den Dividendus erst durch die Zahl dividirt und diesen Quotienten durch den Divisor dividirt.

§ 74.

Umgekehrt gelesen — Z. div. Prod.

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b$$

heißt der Satz:

Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, wenn man sie durch einen Faktor des Produkts nach dem andern, gleichviel mit welchem zuerst, dividirt.

§ 75.

Setzen wir $a = \frac{ab}{b}$, so ist — Zweiter Spezialfall. Z. div. Q.

$$a : \frac{c}{d} = \frac{ab}{b} : \frac{c}{d} =$$

$$= \frac{adb}{cb} \text{ (§ 72) } = \frac{ad}{c}. \text{ (§ 58.)}$$

Wörtlich: Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn wir sie mit dem Divisor des Quotienten multipliziren und dieses Produkt durch den Dividenden des Quotienten dividiren.

§ 76.

Umgekehrt gelesen folgt daraus: — Prod. div. Z

$$\frac{ad}{c} = a : \frac{c}{d},$$

und da ad = da,

$$\frac{da}{c} = d : \frac{c}{a}.$$

Wörtlich: Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn wir die Zahl durch einen der Faktoren des Produkts, gleichviel welchen, dividiren und durch diesen Quotienten den andern Faktor dividiren.

Zusatz. Hieran schließen sich noch folgende Sätze:

1) Setzt man in

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

c = d, so hat man

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

2) Setzt man in

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

c = d, so hat man

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc} = \frac{b}{a}.$$

Wörtlich: Ein Quotient bleibt unverändert, wenn wir Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplizíren oder durch sie dividiren.

Anmerk. Hierauf beruht im Praktischen das Addiren und Subtrahiren vom Quotienten.

Gesetzt ich habe zwei Quotienten zu addiren, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ (nach dem obigen Zusatze, oder auch nach § 58; wenn man für $\frac{a}{b}$, A setzt, wo denn $\frac{Ad}{d} = A$, also $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ ist.)

$\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$. Folglich

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = (\S\ 63)\ \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Es kommt nämlich darauf an, daß der erste Quotient mit dem Divisor des zweiten, der zweite mit dem Divisor des ersten multiplizirt und demnächst wieder dividirt wird.

§ 77.

Q. pot. Z. Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \times \ldots\ldots \times \left(\frac{a}{b}\right)_m = (\S\ 68.)$

$$= (a.a.a \times \ldots\ldots \times a_m) : (b.b.b \times \ldots\ldots \times b_m) = \frac{a^m}{b^m}.$$

Oder:

$$\frac{a}{b} = x$$
$$b = b$$

$$a = xb$$ Dieses nun mit m potenz.
$$m = m$$

$$a^m = (xb)^m = (\S\ 33.)$$
$$= x^m.\ b^m.$$ Das x^m befreien.
$$b^m = b^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = x^m$$

Oder: Es ist

$$\left(b.\frac{a}{b}\right)^m = b^m.\left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (\S\ 33.)$$

$$a^m = b^m.\left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (\S\ 58.\ \text{No.}\ 1.)$$
$$b^m = b^m$$ Dividirt.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Oder, synthetisch: Es sei

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$b^m = b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m.\ b^m = a^m \quad (\S\ 34.\ \text{Nr.}\ 3)$$

$$\left(\frac{a}{b}.b\right)^m = a^m$$

$$a^m = a^m$$ Nun wieder durch b^m dividirt.
$$b^m = b^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^m}{b^m},$$ d. h. die Gleichung ist richtig.

Wörtlich: Ein Quotient wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man Dividendus und Divisor mit ihr potenzirt und erstere Potenz durch letztere dividirt.

§ 78.

Pot. div. Pot. Soll eine Potenz durch eine Potenz dividirt werden, so haben die beiden Potenzen entweder gleiche Exponenten oder gleiche Dignanden, oder sie sind sich ganz gleich*) oder ganz ungleich. Für den letzten Fall $a^m : b^n$ ist keine Gleichung zu finden.

Haben sie gleiche Exponenten, so ist der Fall durch den umgekehrt gelesenen § 77. erledigt:

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Wörtlich: Potenzen von gleichen Exponenten werden dividirt, wenn man die Dignanden dividirt und dem Quotienten den gemeinsamen Exponenten beischreibt.

Haben aber die Potenzen gleiche Dignanden, $\frac{a^m}{a^n}$, so ist $m \gtrless n$.

Gesetzt $m > n$, so sei (§ 39.) $m = n + q$.

Wenn aber $m = n + q$, so ist $m - n = q$. (§ 36.)

Wir haben also

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+q}}{a^n} = (\S\ 29.)\ \frac{a^n \cdot a^q}{a^n} = (\S\ 58.\ \text{No. } 2.)\ a^q.$$

Da aber $q = m - n$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Synthetisch: Es sei

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n = a^n$$

$$a^m = a^{m-n} \cdot a^n = (\S\ 29.\ \text{und}\ 34.)$$

$$= a^{(m-n)+n} = (\S\ 38.\ \text{No. } 1.)$$

$$= a^m$$ Nun wieder dividirt:

$$a^n = a^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^n},$$ d. h. die Gleichung war richtig.

Wörtlich: Potenzen von gleichen Dignanden werden di-

*) Also $a^m : a^m$, worüber Note zum § 79.

vidirt, wenn man den Exponenten der Potenz-Divisor von dem der Potenz-Dividendus subtrahirt und diese Differenz zum Exponenten des gemeinsamen Dignanden macht.

§ 79.

Hier erledigt sich auch eine Kombination, welche bei der Subtraktion noch keine Lösung fand. Z. pot. D.

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Will man den Satz besonders entwickeln:

$$a^{m-n} = x.$$
$$a^n = a^n$$

$$a^{m-n} . a^n = x . a^n$$
$$(\S\ 29.)\ a^{(m-n)+n} = x . a^n$$
$$(\S\ 38.)\ a^m = x . a^n$$
$$a^n = a^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = x.$$

Wörtlich: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, indem man sie mit dem Minuenden potenzirt und diese Potenz durch die Potenz der Zahl mit dem Subtrahenden dividirt.

Anmerk. Man könnte kürzer, aber dann nicht so übersichtlich im Einzelnen, sämmtliche Sätze von der Division als Anwendung und Folgerung der beiden Kombinationen Q.×Z. und Q. div. Z. darstellen.

Hätte man nämlich gezeigt, daß

$$\left(\frac{p}{q}\right)s = \begin{cases} \frac{ps}{q} \\ p\left(\frac{s}{q}\right) \\ \frac{p}{q:s} \end{cases}$$

$$\frac{p:q}{s} = \begin{cases} \frac{p:s}{q} \\ \frac{p}{qs} \end{cases}$$

so folgten alle anderen Sätze daraus*).

*) In der Note auf S. 34. ist bemerkt, daß der Lehrer, etwa indem er die Sätze von der Division wiederholt, die Division mit

§ 80

Die Potenzirung lehrte das Resultat der durch a^m angedeuteten Operation finden; setzt man nämlich $a^m = p$, so findet die Potenzirung aus a^m, p.

Eben so gut kann man sich aber die Aufgabe stellen,

1) aus dem gegebenen Exponenten m und der Gleichung der Potenz p den Dignanden a, und
2) aus dem Dignanden a und der Gleichung der Potenz p den Exponenten m zu finden.

Im ersten Falle sucht man die Zahl, welche mit m potenzirt, p gibt.

Im zweiten Falle sucht man die Zahl, mit welcher a potenzirt, p gibt.

So entstehen, weil $a^m \gtrless m^a$, für die Potenzirung zwei Operationen des Gegensatzes, deren erste wir hier betrachten.

---

der Bruchrechnung zusammenfallen lassen kann. Wir haben in diesem Kapitel alle Formen wie $a - a$, $a : a$ vermeiden und dem folgenden Kapitel aufsparen wollen, obgleich mehrere Kombinationen einer einfacheren Lösung fähig sind, wenn man die Form $a : a = 1$ anwendet. Man könnte etwa folgendermaßen verfahren:

Da nämlich $1 . a = a$ (§ 15.), so ist (§ 58.) $\frac{1a}{a} = 1 = \frac{a}{a}$.

Also $\frac{a}{a} = 1$.

D. h. Ein Quotient, dessen Dividend und Divisor sich gleich sind, ist $= 1$.

Eben so (§ 58.) $\frac{1 . a}{1} = a = \frac{a}{1}$.

Also $\frac{a}{1} = a$.

D. h. Ein Quotient, dessen Divisor 1, ist gleich dem Dividenden. Hiermit lassen sich nun die §§. 65., 67., 70., 73., 75. sehr einfach behandeln.

§ 65. Setzen wir in der Gleichung
Z. ± Q.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

§ 81.

Um die Zahl zu bezeichnen, die mit m potenzirt, p gibt, werden wir ein Zeichen wählen, das aus m und p zusammengesetzt und deshalb charakteristisch ist Wurzel.

$$\sqrt[m]{p}.$$

Wir nennen dieses Zeichen eine **Wurzel** und lesen es: die mte Wurzel aus p, oder auch: p radizirt durch m; p heiße **Radikand**, m der **Wurzelexponent**.

---

statt b, 1,

$$\frac{a}{1} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm c}{d}.$$

§ 67. Q.—Z. Setzen wir in der Gleichung

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd},$$

statt d, 1,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{1} = \frac{a - bc}{b}.$$

§ 70. Z.×Q. Q.×Z. Setzt man in der Gleichung

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

statt b, 1,

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}, \text{ oder}$$

statt d, 1,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}.$$

§ 73. Q. div. Z. Setzt man in der Gleichung

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a:c}{b:d}$$

statt d, 1,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc} = \frac{a:c}{b}.$$

§ 75. Z. div. Q. Setzen wir in der Gleichung

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a:c}{b:d}$$

statt b, 1,

$$\frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}.$$

Bemerk. Man thut wohl, unmittelbar nach §§. 80. 81. die §§. 95. 96. vorzunehmen, damit dem Schüler gleichzeitig der Begriff der Radikation und Logarithmation klar werde.

§ 82.

Radikation. Wird verlangt, daß p durch m radizirt werden oder die mte Wurzel aus p gezogen werden soll, so heißt das, man solle die Zahl denken, welche mit m potenzirt, p gibt. Symbolisch ist die Operation dadurch vollzogen, daß man das Radixzeichen $\sqrt[m]{p}$ hinschreibt.

Anmerk. I. Da $\sqrt[m]{p}$ trotz der Zusammensetzung des Zeichens nur Eine Zahl bedeutet, so muß man auch die Wurzeln, wenn mit ihnen weiter gerechnet werden soll, d. h. wenn sie mit anderen Zahlen in Verbindung treten, damit sie als solche kenntlich bleiben, in Klammern einschließen.

Anmerk. II. Die Wurzel $\sqrt[m]{p}$ bezeichnet die Zahl, welche mit m potenzirt, p gibt. Das Zeichen hat folglich nur dann eine Bedeutung, wenn sowohl m als $p > 1$ und p von der Form 2^m, 3^m, 4^m, a^m u. s. w. ist.

Anmerk. III. Dieses Zeichen $\sqrt[m]{p}$ ist aber auch eindeutig, d. h. es gibt nur Eine Zahl der Zahlenreihe, welche der Wurzel entspricht, oder mit m potenzirt, p gibt.

Es sei $\sqrt[m]{p} = x$.

Gesetzt, es sei auch $\sqrt[m]{p} = y$, so müßte $x \lessgtr y$.

Ist aber $x \gtrless y$, so ist (§ 27.) $x^m \gtrless y^m$.

Nun ist aber $x^m = p$, aber y^m sollte ebenfalls $= p$ sein, welches unmöglich ist*).

---

*) Für den sachkundigen Leser bedarf es wohl kaum der Erinnerung, daß in diesem Kapitel nur von wirklichen Zahlen der Zahlenreihe die Rede ist. Für Zahlformen wäre z. B. die obige Behauptung mißlich. Es ist

$$(+2)^2 = (-2)^2 = 4, \text{ also } \sqrt{4} = +2 \text{ und auch } \sqrt{4} = -2.$$

§ 83.

Aus der obigen Definition der Radikation ergeben sich unmittelbar folgende Grundgleichungen:

1) $(\sqrt[m]{a})^m = a$; denn $\sqrt[m]{a}$ ist die Zahl, welche mit m potenzirt, a gibt, und dies ist hier geschehen.

2) $\sqrt[m]{(a^m)} = a$; denn $\sqrt[m]{(a^m)}$ ist die Zahl, welche mit m potenzirt, a^m gibt; diese Zahl aber ist a.

Diese Gleichungen lehren folglich:

1) Eine Wurzel mit ihrem Wurzelexponenten potenzirt, gibt den Radikanden; oder:

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn sie erst durch eine Zahl radizirt und die erhaltene Wurzel demnächst mit derselben Zahl potenzirt wird.

2) Eine Potenz, durch ihren Exponenten radizirt, gibt den Dignanden; oder:

Eine Zahl bleibt dieselbe, wenn man sie erst mit einer Zahl potenzirt und alsdann die erhaltene Potenz wieder durch dieselbe Zahl radizirt.

Bemerk. Man findet in den folgenden §§. nur die auf dieser Stufe realisirbaren Kombinationen und von diesen nur diejenigen, welche etwas Neues lehren.

§ 84.

Wenn Ungl. rad. Z.

$$\frac{a > b}{\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}.}$$

Denn $\sqrt[m]{a}$ sei nicht größer, so muß sie $\leqq \sqrt[m]{b}$ sein.

Potenziren wir jetzt beide mit m, so erhalten wir

$$(\sqrt[m]{a})^m \leqq (\sqrt[m]{b})^m, \text{ d. h. } a \leqq b.$$

Dies ist aber gegen die Voraussetzung, wo $a > b$.

Wörtlich: Größeres und Kleineres durch Gleiches radizirt, gibt Größeres und Kleineres.

§ 85.

Gleich. rad. Ungl. Ist

$$\frac{m > n}{\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}.}$$

Denn gesetzt es sei $\sqrt[m]{a} \geqq \sqrt[n]{a}$, so wäre

$$(\sqrt[m]{a})^m > (\sqrt[n]{a})^m \text{ (§ 28.), d. h.}$$

$$a > a,$$

welches unmöglich ist.

Wörtlich: Gleiches durch Größeres und Kleineres radizirt, gibt, wo durch das Größere radizirt ist, Kleineres, und wo durch das Kleinere radizirt ist, Größeres.

§ 86.

Ungl. rad. Ungl. Ist $a > b$ und $m < n$, so ist, da

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b} \text{ (§ 84.)}$$

$$\frac{\sqrt[m]{b} > \sqrt[n]{b}. \text{ (§ 85.)}}{\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}.}$$

§ 87.

$\sqrt{}\times\sqrt{}$. Wie werden Wurzeln, die gleiche Wurzelexponenten haben, mit einander multiplizirt?

$$\sqrt[m]{a} \, . \, \sqrt[m]{b} \, . \, \sqrt[m]{c} \times \ldots\ldots \times (\sqrt[m]{k})_r = x$$

$$m = m$$ Schafft man die Radikation fort. (§ 83. 1.)

$$[\sqrt[m]{a} \, . \, \sqrt[m]{b} \, . \, \sqrt[m]{c} \times \ldots\ldots \times (\sqrt[m]{k})_r]^m = x^m$$ Nach § 33. werden Produkte potenzirt.

$$[(\sqrt[m]{a})^m . (\sqrt[m]{b})^m . (\sqrt[m]{c})^m \times \ldots\ldots \times (\sqrt[m]{k})^m_r] = x^m$$ (§ 83. 1.)

$$(a \, . \, b \, . \, c \times \ldots\ldots \times k)_r = x^m$$ Nun x von dem Exponenten befreit.

$$m = m$$

$$\sqrt[m]{(abc \times \ldots\ldots \times k)_r} = x. \text{ d. h.}$$

$$\sqrt[m]{a} \, . \, \sqrt[m]{b} \, . \, \sqrt[m]{c} \times \ldots\ldots \times (\sqrt[m]{k})_r = \sqrt[m]{(abc \times \ldots\ldots \times k)_r}.$$

Oder synthetisch. Es sei

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}\times\ldots\ldots\times(\sqrt[m]{k})_r = \sqrt[m]{(abc\times\ldots\ldots\times k)_r}$$

$$m = m \qquad \text{potenz.}$$

$$[\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}\times\ldots\ldots\times(\sqrt[m]{k})_r]^m = abc\times\ldots\ldots\times k_r$$

$$(\sqrt[m]{a})^m.(\sqrt[m]{b})^m.(\sqrt[m]{c})^m\times\ldots\times(\sqrt[m]{k})^m_r = abc\times\ldots\ldots\times k_r$$

$$abc\times\ldots\ldots\times k_r = abc\times\ldots\ldots\times k_r$$

$$m = m$$

$$\sqrt[m]{abc\times\ldots\ldots\times k_r} = \sqrt[m]{abc\times\ldots\ldots\times k_r},$$

d. h. die Gleichung war richtig.

Wörtlich: r Wurzeln, die gleiche Wurzelexponenten haben, werden miteinander multiplizirt, wenn man die Radikanden miteinander multiplizirt und das Produkt durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radizirt.

§ 88.

Umgekehrt gelesen heißt der vorige Satz: Prod. rad. Z.

$$\sqrt[m]{(abc\times\ldots\ldots\times k_r)} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}\times\ldots\ldots\times(\sqrt[m]{k})_r,$$

oder als Spezialfall:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.$$

Wörtlich: Ein Produkt wird durch eine Zahl radizirt, wenn man jeden einzelnen Faktor durch die Zahl radizirt und die erhaltenen Wurzeln demnächst miteinander multiplizirt.

§ 89.

Setzen wir in der vorigen Gleichung auch noch alle Ra- √ pot. Z.
dikanden einander gleich, so erhalten wir

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}\times\ldots\ldots\times(\sqrt[m]{a})_r = \sqrt[m]{(a.a.a\times\ldots\ldots\times a)_r}$$

$$(\sqrt[m]{a})^r = \sqrt[m]{(a^r)}.$$

Synthetisch. Es sei

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}\times\ldots\ldots\times(\sqrt[m]{a})_{\sigma} = \sqrt[m]{(aaa\times\ldots\ldots\times a)_{\sigma}}$$
$$m = m \qquad \text{Potenzirt.}$$

$$[\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}\times\ldots\ldots\times(\sqrt[m]{a})_{\sigma}]^{m} = (aaa\times\ldots\ldots\times a)_{\sigma}$$
$$= a^{\sigma}.$$
$$[(\sqrt[m]{a})^{m}.(\sqrt[m]{a})^{m}.(\sqrt[m]{a})^{m}\times\ldots\times(\sqrt[m]{a})^{m}]_{\sigma} = a^{\sigma} \text{ (§ 33.)}$$
$$a.a.a\times\ldots\ldots\times a_{\sigma} = a^{\sigma} \text{ (§ 83. 1.)}$$
$$a^{\sigma} = a^{\sigma}$$
$$m = m \quad \text{Radizirt.}$$

$$\sqrt[m]{(a^{\sigma})} = \sqrt[m]{(a^{\sigma})},$$

d. h. die Gleichung war richtig.

Wörtlich: Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man ihren Radikanden mit der Zahl potenzirt und diese Potenz demnächst durch ihren Wurzelexponenten radizirt.

§ 90.

Pot. rad. Z. Der vorige Satz zeigt, umgekehrt gelesen, wie eine Potenz durch eine Zahl radizirt wird.

$$\sqrt[m]{(a^{\sigma})} = (\sqrt[m]{a})^{\sigma}.$$

Wörtlich: Eine Potenz wird durch eine Zahl radizirt, wenn wir den Dignanden der Potenz durch die Zahl radiziren und die so erhaltene Wurzel mit dem Exponenten der Potenz potenziren.

§ 91.

V. div. V. Wie wird eine Wurzel durch eine Wurzel dividirt, wenn beide gleiche Wurzelexponenten haben?

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b} = x$$
$$\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{b} \qquad \text{Multiplizirt. (§ 58. 1.)}$$

$$\sqrt[m]{a} = x.\sqrt[m]{b}$$

$$m = m \qquad \text{Potenzirt (§ 83. 1.)}$$

$$a = x^m . b$$

$$b = b \qquad \text{Divid.}$$

$$\frac{a}{b} = x^m \qquad \text{Durch } m \text{ radizirt.}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = x.$$

Folglich:

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Wörtlich: Eine Wurzel wird durch eine andre, welche mit ihr denselben Exponenten hat, dividirt, wenn man die Radikanden dividirt und den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radizirt.

§ 92.

Der vorige Satz lehrt, umgekehrt gelesen, Q rad. Z.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}.$$

Wörtlich: Ein Quotient wird durch eine Zahl radizirt, wenn man Dividend und Divisor durch die Zahl radizirt und die erste Wurzel durch die letzte dividirt.

Bemerk. Dieser Satz ließ sich auch aus § 88. ableiten. Man setze statt a, $\frac{a}{b}$, so erhält man

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b} . b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} . \sqrt[m]{b},$$

$$\text{d. h. } \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} . \sqrt[m]{b}.$$

$$\frac{\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{b}}{\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.}$$ Auf beiden Seiten durch $\sqrt[m]{b}$ dividirt.

§ 93.

$\sqrt{\ }$. rad. z.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\ }.a} = x$$

$$m = m$$ Mit m potenz.

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = x^m$$

$$\sqrt[n]{a} = x^m$$ (§ 83. 1.)

$$n = n$$ Mit n potenz.

$$(\sqrt[n]{a})^n = (x^m)^n$$

$$a = x^{mn}$$ (§ 83. 1; § 32.)

$$mn = mn$$ Nun x durch Radikation von dem Exponenten mn befreit. (§ 83. 2.)

$$\sqrt[mn]{a} = x.$$

Folglich:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Wörtlich: Eine Wurzel wird durch eine Zahl radizirt, wenn man sie durch das Produkt ihres Wurzelexponenten mit dieser Zahl radizirt.

§ 94.

Z. rad. Prod.

Der vorige Satz lehrt, umgekehrt gelesen,

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Wörtlich: Eine Zahl wird durch ein Produkt radizirt,

wenn man sie successive durch jeden Faktor des Produkts radizirt.

§ 95.

In der Radikation haben wir den ersten Gegensatz der Potenzirung gesehen. Es ist nämlich $\sqrt[m]{p}$ die Zahl, welche mit m potenzirt p gibt.

Jetzt kommen wir zum zweiten Gegensatze, und suchen aus dem Dignanden und der Gleichung der Potenz den Exponenten, fragen also, wenn $a^m = p$,

mit welcher Zahl muß a potenzirt werden, um p zu geben?

§ 96.

Um die Zahl zu bezeichnen, mit welcher a potenzirt p gibt, werden wir aus a und p ein charakteristisches Zeichen bilden. Es sei Logarithmus

$$\overset{a}{\ell} p \text{ oder } p\,?\,a$$

und heiße Logarithmus; a heiße Basis des Logarithmus, p der Logarithmand. Ausgesprochen wird das Zeichen:

Der Logarithmus von p für die Basis a, oder p logarithmirt durch a.

Bemerk. Vgl. §§. 80. 81.

§ 97.

Wird verlangt, daß p durch a logarithmirt werden oder der Logarithmus von p für die Basis a angegeben werden soll, so heißt das, man solle die Zahl denken, mit welcher a potenzirt, p gibt. Symbolisch ist die Operation vollzogen, wenn man das Logarithmuszeichen $p\,?\,a$ oder $\overset{a}{\ell} p$ hinschreibt. Logarithmation.

Bemerk. Obgleich die Logarithmation nicht schwerer als irgend eine der früheren Operationen ist, so ist sie doch den Schülern unbekannter. Man wird demnach wohl thun, die Bedeutung der Radikation und Logarithmation so wie das Verhältniß beider Operationen sowohl untereinander als zur Potenzirung an Ziffern eine Zeitlang einüben zu lassen.

$4^3=64$; $\sqrt[3]{64}=4$; $\overset{4}{\log}64$ oder $64?4=3$.

$5^2=25$; $\sqrt{25}$*) $=5$; $\overset{5}{\log}25$ oder $25?5=2$.

Anmerk. I. Da $\overset{a}{\log}p$ trotz der Zusammensetzung des Zeichens nur Eine Zahl bedeutet, so muß man auch die Logarithmen, wenn mit ihnen weiter gerechnet werden soll, d. h. wenn sie mit anderen Zahlen in Verbindung treten, damit sie als solche kenntlich bleiben, in Klammern einschließen.

Anmerk. II. $\overset{a}{\log}p$ bezeichnet die Zahl, mit welcher a potenzirt werden muß, um p zu geben. Das Zeichen hat folglich nur dann eine Bedeutung, wenn a und p größer als 1 und p von der Form a^2, a^3, a^4, a^m ist.

Anmerk. III. Dieses Zeichen p?a ist aber auch eindeutig, d. h. es gibt nur Eine Zahl, die ihm entspricht; ist $p?a=m$, so ist $a^m=p$; würde aber a mit jeder andern Zahl als mit m potenzirt, so müßte diese $\gtrless$ m sein, könnte also nicht p geben.

§ 98.

Aus der obigen Definition der Logarithmen ergeben sich unmittelbar folgende Grundgleichungen:

1) $a^{b?a} = b$; $a^{\overset{a}{\ell}b} = b$. denn b?a ist die Zahl, mit welcher a potenzirt b gibt; nun ist aber a mit dieser Zahl potenzirt **).

2) $b^a?b = a$; $\overset{b}{\ell}(b^a) = a$. denn $b^a?b$ ist als Logarithmus die Zahl, mit welcher b potenzirt b^a gibt, diese Zahl aber ist a***).

---

*) Die zweite (Quadrat) Wurzel wird gewöhnlich nicht besonders bezeichnet.

**) Zur Erläuterung. $3^{9?3}=9$. Der Exponent 9?3 ist die Zahl, mit welcher 3 potenzirt 9 gibt. Der Logarithmus also 2, denn $3^2=9$. Nun haben wir anstatt $3^{9?3}$, 3^2; dies aber ist 9.

***) $3^2?3=2$. Der Logarithmus $3^2?3=9?3$ bedeutet die Zahl, mit welcher die Basis 3 potenzirt werden muß, um den Logarithmand 9 zu geben; also 2; folglich $3^2?3=2$.

Diese Gleichungen lehren folglich:

1) Die Basis eines Logarithmen mit dem Logarithmus selbst potenzirt, gibt den Logarithmanden; oder:

Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man sie erst durch irgend eine andere, a, logarithmirt, und diese Basis, a, alsdann mit dem Logarithmen b?a potenzirt.

2) Eine Potenz, durch ihren Dignanden logarithmirt, gibt den Exponenten; oder:

Eine Zahl, a, bleibt unverändert, wenn wir erst eine andre, b, mit ihr potenziren, und dann diese Potenz wieder durch dieselbe Zahl, b, logarithmiren.

§ 99.

Ist $a > b$, so ist Z. log. Ungl.

$$\overset{a}{\ell}p < \overset{b}{\ell}p.$$

Denn es sei $\overset{a}{\ell}p = x$ und $\overset{b}{\ell}p = y$, so ist

$$a^x = p \text{ und } b^y = p, \text{ also}$$

$$a^x = b^y, \text{ und da nun}$$

$$a > b, \text{ so ist } x < y, \text{ d. h. } \overset{a}{\ell}p < \overset{b}{\ell}p.$$

Wörtlich: Wird eine Zahl durch Ungleiches logarithmirt, so erhält man für die größere Basis den kleineren Logarithmus.

§ 100.

Ist $p > q$, so ist Ungl. log. Z.

$$\overset{a}{\ell}p > \overset{a}{\ell}q.$$

Denn es sei $\overset{a}{\ell}p = x$ und $\overset{a}{\ell}q = y$, so ist

$$a^x = p \text{ und } a^y = q, \text{ folglich}$$

$$a^x > a^y, \text{ folglich}$$

$$x > y \text{ (§ 28.), d. h. } \overset{a}{\ell}p > \overset{a}{\ell}q.$$

Wörtlich: Größeres und Kleineres durch dieselbe Basis logarithmirt, gibt auf Seite des größeren Logarithmanden den größeren Logarithmus.

§ 101.

Ungl. log. Ungl. Ist $a < b$ und $p > q$, so ist

$$\overset{a}{\ell} p > \overset{b}{\ell} q.$$

Denn $\overset{a}{\ell} p > \overset{a}{\ell} q$ (§ 100.)

$\overset{a}{\ell} q > \overset{b}{\ell} q$ (§ 99.)

folglich $\overset{a}{\ell} p > \overset{b}{\ell} q.$

Wörtlich: Wenn man zwei Zahlen, p und q, von denen die erste größer als die andre, durch zwei Zahlen, a und b, von denen die erste kleiner als die zweite ist, logarithmirt, so erhält man das erstemal den größeren Logarithmen.

§ 102.

Wie werden Logarithmen addirt, welche gleiche Basis log.+log. haben?

Potenziren wir zuvörderst die Basis m mit der Summe mehrerer Logarithmen

$$m^{\overset{m}{\log}.a+\overset{m}{\log}.b+\overset{m}{\log}.c+\dots+\overset{m}{\log}.(k)_r} = m^{\overset{m}{\log}.a} . m^{\overset{m}{\log} b} . m^{\overset{m}{\log}.c} \times$$

$$\times \dots\dots \times (m^{\overset{m}{\log}.k})_r \text{ (§ 29.)} =$$

$$= a.b\, c \times \dots \times k_r \text{ (§ 98. 1.)}$$

$m = m$ — Logarithmiren wir beide Seiten dieser Gleichung durch m. (§ 98. 2.)

$$\overset{m}{\ell} a + \overset{m}{\ell} b + \overset{m}{\ell} c + \dots\dots + \overset{m}{\ell} (k)_r = \overset{m}{\ell} (abc \times \dots\dots \times k)_r.$$

Wörtlich: Logarithmen, die eine gleiche Basis haben, werden addirt, wenn man die Logarithmanden miteinander multiplizirt und dies Produkt durch die gleiche Basis logarithmirt.

§ 103.

Prod. log. Z. Umgekehrt gelesen, lehrt der vorige Satz

$$\overset{m}{\ell} (abc \times \dots\dots \times k)_r = \overset{m}{\ell} a + \overset{m}{\ell} b + \overset{m}{\ell} c + \dots\dots + \overset{m}{\ell} (k)_r.$$

Oder als Spezialfall: $\overset{m}{\ell} ab = \overset{m}{\ell} a + \overset{m}{\ell} b.$

Wörtlich: Ein Produkt wird durch irgend eine Zahl logarithmirt, oder man findet den Logarithmen für eine gewisse

Basis von einem Produkte, wenn man jeden Faktor durch die Basis logarithmirt und die so erhaltenen Logarithmen addirt.

§ 104.

Wird in der vorigen Gleichung statt a, $\frac{a}{b}$ gesetzt, so haben wir log.—log.

$$\overset{m}{\ell}\left(\frac{a}{b}\cdot b\right) = \overset{m}{\ell}\frac{a}{b} + \overset{m}{\ell} b$$

$$\overset{m}{\ell} a = \overset{m}{\ell}\frac{a}{b} + \overset{m}{\ell} b.$$

$$\overset{m}{\ell} b = \overset{m}{\ell} b \qquad \text{Subtrah.}$$

$$\overset{m}{\ell} a - \overset{m}{\ell} b = \overset{m}{\ell}\frac{a}{b}.$$

Wörtlich: Von einem Logarithmen wird ein andrer, der mit ihm dieselbe Basis hat, subtrahirt, wenn der Logarithmand des ersten durch den Logarithmanden des zweiten dividirt und dieser Quotient durch die gleiche Basis logarithmirt wird.

§ 105.

Umgekehrt gelesen, lehrt der vorige Satz Q. log. Z.

$$\overset{m}{\ell}\frac{a}{b} = \overset{m}{\ell} a - \overset{m}{\ell} b.$$

Wörtlich: Ein Quotient wird durch eine Zahl logarithmirt, wenn man den Dividenden und den Divisor durch die Zahl logarithmirt und letzteren Logarithmen vom ersten subtrahirt.

§ 106.

Wir hatten § 103. den Logarithmen eines Produkts; Pot. log. Z. setzen wir darin die Faktoren gleich, so finden wir den Logarithmen einer Potenz.

$$\overset{m}{\ell}(aaa\times\ldots\ldots\times a)_r = \overset{m}{\ell} a + \overset{m}{\ell} a + \overset{m}{\ell} a + \ldots\ldots + (\overset{m}{\ell} a)_r$$

$$\overset{m}{\ell} a^r = (\overset{m}{\ell} a)r.$$

Wörtlich: Eine Potenz wird durch eine Zahl logarith-

mirt, wenn man ihren Dignanden durch dieselbe logarithmirt und diesen Logarithmus mit dem Exponenten der Potenz multiplizirt.

§ 107.

log. × Z. Umgekehrt gelesen, lehrt der vorige Satz

$$(\overset{m}{\ell} a)\mathfrak{r} = \overset{m}{\ell} a^{\mathfrak{r}}.$$

Wörtlich: Ein Logarithmus wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man den Logarithmanden mit derselben potenzirt und diese Potenz durch die Basis des Logarithmen logarithmirt.

§ 108.

√. log. Z. log. div. Z. Setzen wir im vorigen Satze statt a die $\sqrt[\mathfrak{r}]{a}$, so kommt

$$\overset{m}{\ell}[(\sqrt[\mathfrak{r}]{a})^{\mathfrak{r}}] = [\overset{m}{\ell}(\sqrt[\mathfrak{r}]{a})]\mathfrak{r}.$$

$$\overset{m}{\ell} a = [\overset{m}{\ell}(\sqrt[\mathfrak{r}]{a})]\mathfrak{r}.$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r} \qquad \text{Dividirt.}$$

$$\frac{\overset{m}{\ell} a}{\mathfrak{r}} = \overset{m}{\ell}(\sqrt[\mathfrak{r}]{a}).$$

Wörtlich: Eine Wurzel wird durch eine Zahl logarithmirt, wenn man ihren Radikanden dadurch logarithmirt und diesen Logarithmen durch ihren Wurzelexponenten dividirt. Oder, umgekehrt gelesen:

Ein Logarithmus wird durch eine Zahl dividirt, wenn wir den Logarithmanden durch diese Zahl radiziren, und diese Wurzel durch die Basis des Logarithmen logarithmiren.

Beilage.

Anweisung zum Buchstabenrechnen.

Erklärung 1.

Jeder Buchstabenausdruck, in welchem die einzelnen Theile weder durch Addition noch Subtraktion verbunden sind, heißt ein eingliedriger Ausdruck, Monomium; im entgegengesetzten Falle aber im Allgemeinen ein mehrgliedriger Ausdruck, Polynomium. Kommen in einem eingliedrigen Ausdrucke bestimmte Zahlen der Zahlenreihe als Faktoren vor, so nennt man sie Coefficienten, und schreibt sie in der Regel zuerst (§ 23.), die andern Faktoren aber heißen Hauptfaktoren. Endlich sagt man von zwei eingliedrigen Ausdrücken, sie seien gleichartig oder ungleichartig, je nachdem sie sich nur in ihren Coefficienten oder auch in den Hauptfaktoren von einander unterscheiden.

Erklärung 2.

Wird verlangt, daß man ein oder mehrgliedrige Ausdrücke addiren, multipliziren, potenziren, subtrahiren, dividiren, radiziren oder logarithmiren soll, so versteht man darunter zugleich, daß sie vermittelst der vorher entwickelten Formeln in so einfache Form, als möglich, gebracht werden sollen.

Aufgabe I.

Zwei oder mehrere eingliedrige Ausdrücke zu addiren.

Auflösung. Man vereinige die gegebenen Ausdrücke durch das Additionszeichen dergestalt, daß die gleichartigen Glieder nebeneinander stehen (§ 8.), addire die Coefficienten dieser gleichartigen Glieder und multiplizire endlich diese Summen mit den entsprechenden Hauptfaktoren (§ 19.)

Beispiele:

1) $7a^2b^2+8a^3b+6a^4+5a^3b+9a^2b^2+7a^2bc+6a^2b^2+3a^2bc+$
$+7a^3b =$
$7a^2b^2+9a^2b^2+6a^2b^2+8a^3b+5a^3b+7a^3b+7a^2bc+3a^2bc+$
$+6a^4 =$
$(7+9+6)a^2b^2+(8+5+7)a^3b+(7+3)a^2bc+6a^4 =$
$22a^2b^2+20a^3b+10a^2bc+6a^4.$

2) $7a^6b^3c+9a^4b^2c^4+17a^6b^3c+8a^5b^2c^3+14a^5b^2c^3+2a^4b^2c^4.$

3) $2a^mb^n+7a^mc^n+6a^mb^n+3b^mc^n+8a^mb^n+5a^mc^n+9b^mc^n.$

Aufgabe II.

Zwei oder mehrere Summen zu addiren.

Auflösung. Da (nach § 12.) eine Summe zu einer andern addirt wird, wenn man die Summanden derselben zur andern Summe addirt, so kann man die Addition dergestalt einrichten, daß immer die gleichartigen Glieder zu einander addirt werden. Man pflegt deshalb, auch sogleich beim Niederschreiben die gleichartigen Glieder untereinander zu setzen, und addirt darauf dieselben nach Aufgabe I.

Beispiele:

$$
\begin{array}{l}
4)\ 7a^2b^2c^2 + 6a^3b^2c + 8abc^4 \\
+2a^2b^2c^2 + 7a^3b^2c + 14a^2b^3c \\
+9a^2b^2c^2 + 3abc^4 + 5a^2b^3c + 8b^3c^3 \\
+3a^2b^2c^2 + 5a^3b^2c + 9a^2b^3c \\
+12a^3b^2c + 9abc^4 + 6a^2b^3c \\
\hline
21a^2b^2c^2 + 30a^3b^2c + 20abc^4 + 34a^3b^3c + 8b^3c^3.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
5)\ 6xy + 3xz + 7yz + 9uv \\
+ 4uv + 2xz + 6xy \\
+ 3xz + 4uv + 7xy + 6yz \\
+ 9yz + 8xy + 2xz \\
+ 9uv + 3xy + 5yz \\
+10yz + 6uv + 2^by + 3xz \\
+ 8uv + 3xy. \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
6)\ 3a^2b^2c^n + 7a^3b^pc^q + 9a^6bc \\
+ a^2b^2c^n + 15a^6bc + a^3b^pc^q\ {}^{*)} \\
+11a^6bc + 18a^3b^pc^q + 2a^2b^2c^n \\
+ 7a^6bc + 7a^3b^pc^q + 13a^2b^2c^n \\
+23a^3b^pc^q + 8d^2b^2c^n + 18a^6b^2c^n \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
7)\ 13a^mb^p + 26c^nd^q + 8r \\
7a^mb^p + 9c^nd^q + 14r \\
23c^nd^q + 18r + 36a^mb^p \\
16r + 18a^mb^p + 25c^nd^q \\
23r + 14c^nd^q + 11a^mb^p \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
8)\ 16x^2yz + 14u^mv^n + 13vz^p \\
+17vz^p + 4u^mv^n + 14x^2yz \\
+ 5u^mv^n + 95x^2yz + 27vz^p \\
+52x^2yz + 47vz^p + 9u^mv^n \\
+20u^mv^n + 18x^2yz + 3vz^p \\
\hline
\end{array}
$$

Aufgabe III.

Eingliedrige Ausdrücke mit einander zu multipliziren.

Auflösung. Man kann zuerst die Coefficienten und dann die Hauptfaktoren mit einander multipliziren (§ 24.), die erhaltenen Produkte aber als Faktoren eines neuen Produkts nebeneinander stellen. Da man ferner (nach § 23.) die Faktoren dieses letzteren Produkts in eine beliebige Ordnung bringen kann, so pflegt man sie in der Regel zur bequemeren Uebersicht in lexikographische Reihenfolge zu bringen. Befinden sich endlich unter den

---

*) Nach § 15. ist $a = 1 . a$. Man kann also bei einem Ausdruck, der keinen besonderen Coefficienten hat, immer den Coefficienten 1 hinzudenken. Deshalb pflegt man auch umgekehrt diesen Coefficienten, da wo er vorkommt, ganz wegzulassen.

Faktoren Potenzen mit gleichen Dignanden, so addirt man die Exponenten und läßt den Dignanden unverändert (§ 29.), wobei man besonders den Fall $a^m . a = a^{m+1}$ zu merken hat.

Beispiele:

1) $7af \times 36bd \times 5ce = 7 \times 36 \times 5afbdce = 1260abcdef.$

2) $8a^2b^2 \times 9a^3b \times 4ab^2c \times a^2b^2c^2 = 8 \times 9 \times 4 \times a^2 . a^3 . a . a^2 \times b^2 . b . b^2 . b^2 \times c . c^2 = 288 . a^8b^7c^3.$

3) $5a^3b^4 \times 10a^2b^5c \times 3a^7.$ 4) $5a^3b^4 \times a^2b^8 \times 4ab^3c \times 10a^2c^7.$

Aufgabe IV.

Eine Summe mit einem eingliedrigen Ausdruck zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire mit Anwendung der vorigen Aufgabe jeden Summanden der Summe mit dem eingliedrigen Ausdrucke und addire die Produkte.

Beispiele:

5)
$$\begin{array}{r} 3a^2b^2 + 4abc^2 + 15a^2d^2 + 8cd^3 \\ 6a^2bd \\ \hline 18a^4b^3d + 24a^3b^2c^2d + 90a^4bd^3 + 48a^2bcd^4. \end{array}$$

6) $(a^2 + 3ab + 5b^2) \times 4a^2b.$ 7) $(2a^3b^5 + 5a^2c^6 + 9a^3b^2c^3) \times 3a^2bc^2.$

8) $(27a^6x^7 + 9b^3y^5 + 18a^2x^2y^6 + 16y^9) \times 24a^2x^2y.$

9) $(21a^2b^2cd + 17a^4b^2c^3 + 6b^2c^2d^5) \times 7a^4b^2d.$

Aufgabe V.

Zwei Summen mit einander zu multipliziren.

Auflösung. Man hat jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der andern Summe zu multipliziren und die Produkte zu addiren. (§ 20.) Bei allen diesen Multiplikationen richtet man sich nach Aufgabe III., damit man aber die Addition leichter ausführen könne, schreibt man sogleich die gleichartigen Partialprodukte untereinander, wie bei Aufgabe II.

Beispiele:

10) $a^6b^{12} + 6a^5b^{10}c^2 + 15a^4b^8c^4 + 20a^3b^6c^6 + 15a^2b^4c^8 + 6ab^2c^{10} + c^{12}$

$4a^3b^6 + 12a^2b^4c^2 + 12ab^2c^4 + 4c^6$

$$\begin{aligned}
&4a^9b^{18} + 24a^8b^{16}c^2 + 60a^7b^{14}c^4 + 80a^6b^{12}c^6 + 60a^5b^{10}c^8 + 24a^4b^8c^{10} + 4a^3b^6c^{12} \\
&\quad + 12a^8b^{16}c^2 + 72a^7b^{14}c^4 + 180a^6b^{12}c^6 + 240a^5b^{10}c^8 + 180a^4b^8c^{10} + 72a^3b^6c^{12} + 12a^2b^4c^{14} \\
&\qquad + 12a^7b^{14}c^4 + 72a^6b^{12}c^6 + 180a^5b^{10}c^8 + 240a^4b^8c^{10} + 180a^3b^6c^{12} + 72a^2b^4c^{14} + 12ab^2c^{16} \\
&\qquad\quad + 4a^6b^{12}c^6 + 24a^5b^{10}c^8 + 60a^4b^8c^{10} + 80a^3b^6c^{12} + 60a^2b^4c^{14} + 24ab^2c^{16} + 4c^{18}
\end{aligned}$$

$$4a^9b^{18} + 36a^8b^{16}c^2 + 144a^7b^{14}c^4 + 336a^6b^{12}c^6 + 504a^5b^{10}c^8 + 504a^4b^8c^{10} + 336a^3b^6c^{12} + 144a^2b^4c^{14} + 36ab^2c^{16} + 4c^{18}$$

11) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) \times (a^2 + 7ab)$. 12) $(7a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + 2b^3) \times (3a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2)$.

13) $(a^6 + 3a^4b^2 + 5a^2b^4) \times (7a^4 + 4a^2b^2 + b^4)$. 14) $(a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) \times (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.

15) $(12a^5c^2 + 6a^2bc^2 + c^3) \times (24a^5c^2 + 12a^2bc^2 + 2c^3)$.

Aufgabe VI.

Einen eingliedrigen Ausdruck mit einer Zahl zu potenziren.

Auflösung. Man potenzire einen jeden Faktor desselben mit dieser Zahl (§ 33.); wenn einer oder mehrere dieser Faktoren schon Potenzen sind, multiplizire man die Exponenten derselben mit dieser Zahl und lasse die Dignanden unverändert (§ 32.); wenn aber die Faktoren ganz bestimmte Zahlen der Zahlenreihe sind, berechne man die Potenzen durch wiederholtes Multipliziren. (§ 24.)

Beispiele:

1) $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 \times 6 = 216 \times 6 = 1296$. 2) $(12)^5$. 3) $(28)^4$. 4) $(39)^6$.

5) $(9ab^2c^4d^5)^3 = 9^3a^3b^6c^{12}d^{15} = 729a^3b^6c^{12}d^{15}$. 6) $(4a^2b^3c^m)^8$. 7) $(3a^2b^pc^{3q})^5$. 8) $(16ab^2c^pd^{2p+q})^7$.

Aufgabe VII.

Eine Summe mit einer Zahl zu potenziren.

Auflösung. Man berechne die Potenz durch wiederholtes Multiplizieren nach Aufgabe V.

Beispiele:

9) $7a^2 + 6bc$
$7a^2 + 6bc$

$49a^4 + 42a^2bc$
$+ 42a^2bc + 36b^2c^2$

$(7a^2 + 6bc)^2 = 49a^4 + 84a^2bc + 36b^2c^2$
$49a^4 + 84a^2bc + 36b^2c^2$
$7a^2 + 6bc$

$343a^6 + 588a^4bc + 252a^2b^2c^2$
$294a^4bc + 504a^2b^2c^2 + 216b^6c^3$

$(9a^2 + 6bc)^3 = 343a^6 + 882a^4bc + 756a^2b^2c^2 + 216b^6c^3$
u. s. w.

10) $(8ax^2 + 2by)^4$. 11) $(3ab + 5ac + 7bc)^3$.
12) $(2a^2b^4 + 6a^3b^3 + 8a^4b^2)^4$.

Aufgabe VIII.

Einen eingliedrigen Ausdruck von einem andern zu subtrahiren.

Die Auflösung ist ganz ähnlich der der Aufgabe I., nur daß statt des § 19. der § 33. in Anwendung kommt.

Beispiele:

1) $7a^2b^2c - 5a^2b^2c = (7 - 5)a^2b^2c = 2a^2b^2c$
2) $9a^3b^2x^m - 6a^3b^2x^m$. 3) $27x^8y^6z^4 - 18x^8y^6z^4$.

Aufgabe IX.

Eine Summe von einer andern zu subtrahiren.

Die Auflösung ist ähnlich der der Aufgabe II., nur daß statt des § 12. der § 50. angewandt werden muß. Auch hat man noch zu merken, daß wenn in beiden Summen ganz und gar übereinstimmende Summanden sind, solche nach § 52. Zus.) ganz weggelassen werden können.

Beispiele:

4) $5a^4 + 17a^3b^2 + 23c^2d^3 + 3e^2f + 7g^3$
$4a^4 + 6a^3b^2 + 18c^2d^3 + 7g^3$

$a^4 + 11a^3b^2 + 5c^2d^3 + 3e^2f.$

5) $6a^4xy + 9b^2xz^2 + 15d^2yz^3 + 23e^2fz$
$3b^2xz^2 + 4a^4xy + 9e^2fz + 15d^2yz^3$

6) $108a^m x^n + 217b^p y^q + \ 26c^r z^s$
$64a^m x^n + \ 17c^r z^s + 209b^p y^q$

7) $28ab + 15cd + 27fg + 19hi$
$13cd + \ hi + 28ab.$

8) $7abc + 6acd + 5bcd + 18efg$
$6efg + 4abc + 5bcd$

Aufgabe X.

Einen eingliedrigen Ausdruck durch einen andern zu dividiren.

Auflösung. Man dividire den Coefficienten des Dividenden durch den des Divisors, dann die Hauptfaktoren des Dividenden durch die des Divisors und multiplizire die Produkte (§ 69.) Kommt in den Hauptfaktoren des Dividenden und des Divisors derselbe Buchstabe als gemeinschaftlicher Faktor vor, so kann man denselben (nach § 76. Zus.) ganz weglassen; kommen aber in Dividend und Divisor Potenzfaktoren mit gleichen Dignanden vor, so kann man die Quotienten derselben vermittelst der Formel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (§ 78.) in eine einfache Potenz verwandeln, wobei noch besonders $\frac{a^m}{a} = a^{m-1}$ (§ 25.) zu merken. Diese Verwandlung kann unmittelbar vorgenommen werden, wenn der Exponent der Potenz im Dividenden größer ist als als der im Divisor, tritt aber der umgekehrte Fall ein, so geschieht die Vereinfachung (nach § 76. Zus.), indem man $\frac{ca^m}{da^n} = \frac{c}{d(a^m : a^n)} = \frac{c}{d \, . \, a^{m-n}}$ setzt.

Beispiele:

1) $\frac{24a^8b^6c^3d^2e}{8a^8b^4c^3d^5f} = 3\frac{b^2c^2e}{d^3f} = \frac{3b^2c^2e}{d^3f}$. 2) $\frac{27a^6b^6c}{9a^3b^8c}$.

3) $\frac{56a^4\,b^2d}{8a^{10}b^5e}$. 4) $\frac{119a^3b^2c^5d^4f^m}{17a^3b^4c^3d\,f^n}$.

Aufgabe XI.

Eine Summe durch einen eingliedrigen Ausdruck zu dividiren.

Auflösung. Man dividire mit Anwendung der vorhergehenden Auflösung jeden Summanden der Summe durch den gegebenen Ausdruck und addire die Quotienten (§ 64.)

Beispiele:

5) $16a^4b^4c^2d + 48a^8b^6c^7d + 64a^{10}b^6c^2d$ (Dividend.)

(Divis.) $8a^2b^2cd \,|\, 2a^2b^2c \ + \ 6a^6b^4c^6 \ + \ 8a^8b^4c.$ (Quot.)

6) $(90a^3f^4 + 45a^5f^6g + 30a^4f^3h) : 15a^2f^2.$

7) $4a^4b+12^3b^2+20a^2b^3):4a^2b.$

8) $(6a^5b^6c^2+15a^4bc^8+27a^5b^3c^5):3a^2bc^3$

Aufgabe XII.

Eine Summe durch eine andere Summe zu dividiren; d. h. eine dritte Summe zu. finden, die mit der zweiten multiplizirt zum Produkte die erste Summe gibt.

Auflösung. Nach § 66. kann man jeden Quotienten in eine Summe verwandeln, deren erster Summand beliebig ist, deren zweiter Summand aber wiederum ein Quotient mit dem Divisor des ersten ist, dessen Dividend man aber findet, wenn man den Divisor mit dem ersten Summanden multiplizirt und das Produkt vom Dividenden des gegebenen Quotienten subtrahirt. Da man nun aber mit diesem zweiten Quotienten wiederum eben so verfahren kann, wie mit dem ersten, u. s. f., so sieht man, daß man jeden Quotienten in eine Summe beliebig vieler Summanden zerlegen kann, deren letzter aber im Allgemeinen immer wiederum ein Quotient sein wird. Um nun aber der gegebenen Aufgabe gemäß, den letzten Quotienten so einfach als möglich zu erhalten, wird man die Dividend und Divisor nach den fortlaufenden Potenzen eines und desselben Buchstaben ordnen und die jedesmaligen neu hinzukommenden Summanden so annehmen, daß immer das höchste Glied des Dividenden beim Subtrahiren verschwindet, zu welchem Ende man nur dieses höchste Glied des Dividenden durch das des Divisors dividiren, und den dadurch erhaltenen Quotienten als neu hinzukommenden Summanden rechnen darf.

Beispiele:

9) $4a^6x^{12}+24a^5x^{10}z^3+60a^4x^8z^6+80a^3x^6z^9+60a^3x^4z^{12}+24ax^2z^{15}+4z^{18} \,\Big|\, \dfrac{2a^2x^4+4ax^2z^3+2z^6}{2a^4x^8+8a^3x^6z^3+12a^2x^4z^6+8ax^2z^9+2z^{12}.}$

$4a^6x^{12}+\ 8a^5x^{10}z^3+\ 4a^4x^8z^6=$ Divisor $\times 2a^4x^8$

Anfang des ersten Restes. $16a^5x^{10}z^3+56a^4x^8z^6+80a^3x^6z^9$

$16a^5x^{10}z^3+32a^4x^8z^6+16a^3x^6z^9=$ Divisor $\times 8a^3x^6z^3$

Anfang des zweiten Restes. $24a^4x^8z^6+64a^3x^6z^9+60a^2x^4z^{12}$

$24a^4x^8z^6+48a^3x^6z^9+24a^2x^4z^{12}=$ Divisor $\times 12a^2x^4z^{16}$

Anfang des dritten Restes. $16a^3x^6z^9+36a^2x^4z^{12}+24ax^2z^{15}$

$16a^3x^6z^9+32a^2x^4z^{12}+16ax^2z^{15}=$ Divisor $\times 8ax^2z^9$

Vierter Rest. $4a^2x^4z^{12}+\ 8ax^2z^{15}+4z^8$

$4a^2x^4z^{12}+\ 8ax^2z^{15}+4z^8=$ Divisor $\times 2z^{12}$.

10) $(10x^6+51x^5+100x^4+167x^3+199x^2+170x+63):(5x^2+8x+7)$.

11) $(21a^7b+56a^6b^2+97a^5b^3+157a^4b^4+179a^3b^5+139a^2b^6+73ab^7+18b^8):(3a^3+8a^2b+7ab^2+2b^3)$.

12) $21a^9b^7c^3+57a^8b^6c^4+153a^7b^5c^5+239a^6b^4c^6+267a^5b^3c^7+315a^4b^2c^8+177a^3bc^9+90a^2c^{10})$:

$(3a^4b^3c^2+6a^3b^2c^3+9a^2bc^4+5ac^6)$.

Anmerk. Um nicht zu viel schreiben zu müssen, setzt man nur vom jedesmaligen Reste so viele Glieder hin, als man bei der nächstfolgenden Subtraktion bedarf.

Aufgabe XIII.

Eine Wurzelgröße, deren Radikand eingliedrig ist, zu reduziren, d. h. auf die möglichst einfachste Form zu bringen.

Auflösung. 1) Man ziehe die verlangte Wurzel aus denjenigen Faktoren, aus welchen sich die in Rede stehende Wurzel ausziehen läßt, aus, und bringe sie vor das Wurzelzeichen; die übrigen lasse man hinter dem Wurzelzeichen (§ 88.) Sind die Faktoren Potenzen, so folgt aus der Definition § 81. und aus dem § 82. unmittelbar, daß $\sqrt[m]{(a^p)} = a^{\frac{p}{m}}$, d. h. daß man, um die verlangte Wurzel aus der Potenz zu ziehen, nur den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten zu dividiren, den Dignanden aber unverändert zu lassen hat.

Z. B. $\sqrt[12]{4^{36}.a^{24}.b^{32}.c^{36}.d^{16}.(e+f)^8} =$
$= \sqrt[12]{(4^{36})}.\sqrt[12]{(a^{24})}.\sqrt[12]{(c^{36})}.\sqrt[12]{b^{32}.d^{16}.(e+f)^8} =$
$= 4^3a^2c^3\sqrt[12]{b^{32}.d^{16}.(e+f)^8}.$

2) Man suche die unter dem Wurzelzeichen gebliebenen Faktoren dergestalt in Faktoren zu zerlegen, daß sich aus einigen die verlangte Wurzel ziehen läßt, und verfahre dann wie vorher.

Z. B. $\sqrt[12]{b^{32}.d^{16}.(e+f)^8} = \sqrt[12]{b^{24}.b^8.d^{12}.d^4.(e+f)^8} =$
$= b^2d\sqrt[12]{b^8.d^4.(e+f)^8}.$

3) Man sehe, ob nicht sämmtliche Potenzexponenten und der Wurzelexponent durch dieselbe Zahl ohne Rest dividirt werden können, und bringe dadurch die Wurzel auf einen niedrigern Exponenten, daß man durch diesen gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

Denn es ist $\sqrt[mn]{(a^p)} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{(a^p)}}$ (§ 93.) $= \sqrt[m]{(a^{\frac{p}{n}})}$.

Z. B. $\sqrt[12]{b^8.d^4.(e+f)^8} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^8.d^4.(e+f)^2}} =$
$= \sqrt[3]{b^2.d.(e+f)^2},$

also $\sqrt[12]{4^{36}.a^{24}.b^{32}.d^{16}.(e+f)^8} = 4^3.a^2b^2c^3d\sqrt[3]{b^2.d.(e+f)^2} =$
$= 64a^2.b^2.c^3.d.\sqrt[3]{b^2.d.(e+f)^2}.$

4) Sind unter den Faktoren des Radikanden bestimmte Zahlen, so läßt sich für die zweite, dritte und vierte Wurzel in den

am häufigsten vorkommenden Fällen aus folgender Tabelle bestimmen, ob aus ihnen die verlangte Wurzel gezogen werden kann, oder wie man sie zu zerlegen hat, daß man entweder nach No. 2. theilweise die Wurzel ausziehen, oder sie nach No. 3. erniedrigen kann:

$z=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z^2=$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$z^3=$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
$z^4=$	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

Beispiele:

1) $\sqrt{9a^4b^2f^{12}g^8}$. 2) $\sqrt[3]{27u^9x^2(a+b)^5}$. 3) $\sqrt[4]{486a^{16}b^9c^6(a^2-b^2)^7}$. *)

4) $\sqrt[6]{6561a^9b^{15}(c^2-d^2)^{27}}$.

Aufgabe XIV.

Wurzelausdrücke zu addiren und zu subtrahiren.

Auflösung. Man verbinde sie durch das Additions- oder Subtraktionszeichen. Reduziren lassen sie sich nur dann, wenn sie gleichartig sind, d. h. im Radikanden und Exponenten übereinstimmen, und zwar hat die Reduktion gar keine Schwierigkeit und geschieht so wie bei den Aufgaben I., II. und III. Ob aber solche Wurzeln gleichartig oder ungleichartig sind, kann man nur erst dann beurtheilen, wenn man sie reduzirt hat; denn durch die Reduktion werden oft Wurzelgrößen gleichartig, die im ersten Augenblick als ungleichartig erscheinen.

Beispiele:

1) $3\sqrt[6]{a}+17\sqrt[6]{a}+12\sqrt[6]{a}=(3+17+12)\sqrt[6]{a}=32\sqrt[6]{a}$.

2) $18a^2b\sqrt[m]{xy}-4a^2b\sqrt[m]{xy}=(18-4)a^2b\sqrt[m]{xy}=14a^2b\sqrt[m]{xy}$.

3) $(6\sqrt{2}+5\sqrt{2}+3\sqrt{2})-8\sqrt{2}$ **).

4) $(7\sqrt[m]{a}+3\sqrt[m]{b}+16\sqrt[m]{b}+15\sqrt[m]{a}+8\sqrt[m]{ab})-(4\sqrt[m]{b}+4\sqrt[m]{ab}+2\sqrt[m]{a}+$
$+7\sqrt[m]{b})$.

---

*) $486=6.81$.

**) $\sqrt{a}$ heißt $\sqrt[2]{a}$. Ob aber Ausdrücke wie $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{5}$ rc. Bedeutungen haben, und welche Bedeutungen sie haben, kann erst im folgenden Abschnitte entschieden werden. Hier werden wir einstweilen nach den entwickelten Formeln mit ihnen rechnen.

$$5)\quad 10\sqrt{2}+5\sqrt[7]{8}+7\sqrt[m]{5}+2\sqrt[3]{a}$$
$$+15\sqrt{2}+4\sqrt[7]{8}+\sqrt[m]{5}+3\sqrt[3]{a}$$
$$+27\sqrt[7]{8}+\sqrt[m]{5}+6\sqrt[3]{a}$$
$$+5\sqrt[m]{5}+\sqrt[3]{a}+11\sqrt{2}$$

$$6)\quad 8a^2b\sqrt[m]{cdx}+bcd\sqrt[3]{a^2b}+3m\sqrt[3]{z}$$
$$+3a^2b\sqrt[m]{cdx}+m\sqrt[3]{z}+5bcd\sqrt[3]{a^2b}$$
$$+48f\sqrt[3]{g}+18bcd\sqrt[3]{a^2b}+7m\sqrt[3]{z}$$
$$+6bcd\sqrt[3]{a^2b}+8a^2b\sqrt[m]{cdx}+6m\sqrt[3]{z}$$

$$7)\quad a^3b^4\sqrt[3]{xy}+x^3y^4\sqrt[4]{ab}$$
$$+6x^3y^4\sqrt[4]{ab}+9tz\sqrt[3]{uv}$$
$$+tz\sqrt[3]{uv}+8rz\sqrt[m]{p}$$
$$+tz\sqrt[m]{p}+6a^3b^4\sqrt[3]{xy}$$

Aufgabe XV.

Eingliedrige Wurzelausdrücke von gleichen Exponenten mit einander zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizirt die Radikanden und läßt den Wurzelexponenten unverändert (§ 87). Haben die Wurzelausdrücke noch Faktoren vor den Wurzelzeichen, so werden diese für sich multiplizirt (§ 24.); endlich wird das erhaltene Produkt so viel wie möglich reduzirt, zu welchem Ende es oft gut ist, die Coefficienten unter den Wurzelzeichen nicht wirklich zu multipliziren, sondern die Multiplikation nur anzudeuten, weil sich auf diese Weise die Reduktion leichter bewerkstelligen läßt.

Beispiele:

1) $6a^2b^3x^m\sqrt[4]{144a^3b^2c^{2m-3}} \times 5abx^py^q\sqrt[4]{270a^2b^3c^{3m+2}d^r} =$

$30a^3b^4x^{m+p}y^q\sqrt[4]{144.216a^5b^5c^{5m-1}d^r} = 30a^3b^4x^{m+p}y^q\sqrt[4]{8.3.6 \times 2.27.5a^5c^{7m-1}d^r}$

$= 30a^3b^4x^{m+p}y^q\sqrt[4]{2^4.3^4 \times 6.4a^5b^5c^{5m-1}d^r}.$

$= 180a^4b^5c^mx^{m+p}y^q\sqrt[4]{24abc^{m-1}d^r}.$

2) $\sqrt{12} \times \sqrt{21}$. 3) $\sqrt{8} \times \sqrt{72}$. 4) $2ab\sqrt{5cd} \times 3bc\sqrt{bde} \times 4cd\sqrt{45ef}$.

5) $2ab\sqrt[3]{16a^2c^2} \times 3bc\sqrt[3]{9b^2c^2} \times 6ac\sqrt[3]{21ac}$. 6) $7a^2b\sqrt[4]{8a^3c^3} \times 2bc\sqrt[4]{54a^2bc} \times \sqrt[4]{6b^3c^3d}$.

Aufgabe XVI.

Wurzelausdrücke von ungleichen Wurzelexponenten mit einander zu multiplizіren.

Auflösung. Es ist (Auflösung der Aufgabe XIII. No. 3.) $\sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{mr}{pr}}$ (§ 76. Zus.) $= \sqrt[pr]{(a^m)^r}$, woraus man sieht, daß ein Wurzelausdruck dem Werthe nach unverändert bleibt, wenn man den Wurzelexponenten mit einer beliebigen Zahl multiplizirt und dafür den Radikanden mit derselben Zahl potenzirt. Nach dieser Bemerkung kann man zwei oder mehrere Wurzelausdrücke in andere von gleichen Exponenten verwandeln (eben so, wie man Brüche auf gleiche Benennung bringen kann), und dann diese Wurzelausdrücke nach der vorhergehenden Aufgabe mit einander multiplizіren.

Beispiele:

1) $2a^2b\sqrt[3]{4a^2c^2x^m} \times 7a^4b^3\sqrt[4]{24a^3c^2y^n} = 2a^2b\sqrt[12]{4^4a^8c^8x^{4m}} \times 7a^4b^3\sqrt[12]{(24)^3a^9c^6y^{3n}}$

$= 14a^6b^4\sqrt[12]{4^4(24)^3a^{17}c^{14}x^{4m}y^{3n}}$ *) $= 28a^7b^4c\sqrt[12]{864a^5c^2x^{4m}y^{3n}}$.

2) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4}$. 3) $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[10]{3}$. 4) $6a\sqrt[3]{4} \times 5b\sqrt[5]{12}$. 5) $5a^2b\sqrt[4]{9a^3b^4} \times 2ab^2\sqrt[5]{108a^6b^5}$.

6) $13a^2b\sqrt[4]{\frac{4a^2b}{3x^2y^2}} \times 4x^2y\sqrt[18]{\frac{9a^4b^8}{2xy}}$.

Aufgabe IX.

Eine Summe von Wurzelausdrücken mit einem einfachen Wurzelausdrucke oder mit einer andern Summe von Wurzelausdrücken zu multipliziren.

Auflösung. Man verfährt in der Hauptsache wie in Aufg. IV. oder Aufg. V., wende aber bei jeder einzelnen Multiplikation die Regeln der vorhergehenden Auflösung an.

1) $(2a\sqrt{3bc} + 5b\sqrt[3]{2a^2c^2} + 7c\sqrt[4]{6a^3b^3}) \times 8abc\sqrt[5]{a^4b^4c^4} =$

$2a\sqrt[10]{3^5b^5c^5} \times 8abc\sqrt[10]{a^8b^8c^8} + 5b\sqrt[15]{2^5a^{10}c^{10}} \times 8abc\sqrt[15]{a^{12}b^{12}c^{12}} + 7c\sqrt[20]{6^5a^{15}b^{15}} \times 8abc\sqrt[20]{a^{16}b^{16}c^{16}} =$

$16a^2b^2c^2\sqrt[10]{243a^8b^3c^3} + 40a^2b^2c^2\sqrt[15]{32a^7b^{12}c^7} + 56a^2b^2c^2\sqrt[20]{7776a^{11}b^{11}c^{16}} =$

$8a^2b^2c^2\,[2\sqrt[10]{243a^8b^3c^3} + 5\sqrt[15]{32a^7b^{12}c^7} + 7\sqrt[20]{7776a^{11}b^{11}c^{16}}.]$

2) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{10}) \times 2\sqrt{5}$. 3) $(\sqrt{6} + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{5}) \times \sqrt[3]{8}$. 4) $(2a\sqrt{b} + 3b\sqrt[4]{c} + 6c\sqrt[6]{d}) \times 5abc\sqrt[8]{3a^2b^2c^2}$.

*) $4^4(24)^3 = (2^2)^4 . (2^3)^3 . 3^3 = 2^{17} . 27 = 2^{12} . 32 . 27 = 2^{12} . 864$.

5) $(\sqrt[3]{9a^2b^2}+\sqrt[5]{6a^3c^3}+\sqrt[10]{8b^4c^4})\times 2abc\sqrt[15]{18a^3b^4c^5}$.

6) $8a^2b^2\sqrt[6]{9a^3b^3c^2}+4a^2c^2\sqrt[8]{16a^5b^4c^3}+24b^2c^2\sqrt[10]{24a^4b^2c^3})\times$
$\sqrt[12]{18a^6b^4c}$.

$$\begin{array}{l} 7)\ 2\sqrt{a}+3c\sqrt[3]{b} \\ \quad \sqrt{a}+2c\sqrt[3]{b} \\ \hline 2a+3c\sqrt[6]{a^3b^2}+4c\sqrt[6]{a^3b^2}+6c^2\sqrt[3]{b^2}= \\ 2a+bc^2+(3c+4c^2)\sqrt[6]{a^3b^2}. \end{array}$$

8) $3+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$. 9) $(7+2\sqrt{6})(9+5\sqrt{6})$.
10) $(9+7\sqrt{13})(5+6\sqrt{3})$. 11) $(6+12\sqrt{7})(3+5\sqrt{7})$.
12) $9+2\sqrt{10})(8+7\sqrt{10})$.
13) $2+3\sqrt{5}+2+\sqrt{6})\times(2\sqrt{5}+18\sqrt{S})$.
14) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}+7\sqrt{2})\times(\sqrt{72}+5\sqrt{20}+2\sqrt{2})$*).

Zusatz. Ist einer der beiden Wurzelausdrücke eine Differenz oder sind beide Differenzen, so tritt nur die Veränderung ein, daß statt des § 17. der § 53. angewandt wird, und die Reduktion nach § 52. geschieht.

$$\begin{array}{rr} 15)\ 27+ & 2\sqrt{b} \\ 9- & 5\sqrt{b} \\ \hline 243+ & 18\sqrt{b} \\ -60- & 135\sqrt{b} \\ \hline 183- & 117\sqrt{b} \end{array}$$

16) $(7+3\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})$. 17) $2\sqrt{b}+3\sqrt{8})(7\sqrt{b}-2\sqrt{8})$.
18) $(5\sqrt{3}-b\sqrt{7})(9\sqrt{3}-4\sqrt{7})$.
19) $(a+c\sqrt{b})(a-c\sqrt{b})=a^2-bc^2$.
20) $(a+d\sqrt{b})(a-d\sqrt{b})=a^2-bd^2$.
21) $(c\sqrt{a}+d\sqrt{b})(c\sqrt{a}-d\sqrt{b})=a.c^2-b.d^2$.

Erklärung 3.

Soll man irgend einen Ausdruck durch einen Wurzelausdruck dividiren, so versteht man darunter weiter nichts, als den Quotienten so umzuformen, daß er ohne Veränderung seines Werths einen Divisor, der von allen Wurzelzeichen befreit ist, erhält.

---

*) Das Produkt wird nach gehöriger Reduktion zweigliedrig.

Aufgabe XVIII.

Einen beliebigen Ausdruck durch einen eingliedrigen Wurzelausdruck zu dividiren.

Auflösung. Bezeichnet man den Dividenden mit A, den Divisor mit $\sqrt[m]{B}$, so ist der Quotient

$$\frac{A}{\sqrt[m]{B}} = \frac{A.\sqrt[m]{(B^{m-1})}}{\sqrt[m]{B}.\sqrt[m]{(B^{m-1})}} \ (\S\ 76.) = \frac{A.\sqrt[m]{(B^{m-1})}}{\sqrt[m]{(B^{m-1}B)}} \ (\S\ 87.) = \frac{A\sqrt[m]{(B^{m-1})}}{\sqrt[m]{(B^m)}} \ (\S\ 29.) = \frac{A\sqrt[m]{(B^{m-1})}}{B.} (\S\ 83.);$$

so daß man, um seinen Zweck zu erreichen, nur beide Theile des Quotienten mit $\sqrt[m]{(B^{m-1})}$ zu multipliziren hat.

Beispiele:

1) $$\frac{3a^2b\sqrt[5]{6c^2d^3f^4}}{ac\sqrt[3]{9cde}} = \frac{ab\sqrt[5]{6c^2d^3f^4}.\sqrt[3]{9^2c^3d^2e^2}}{c^2de} = \frac{ab\sqrt[15]{2^3.3^3.c^6d^9.f^{12}\times 9^{10}c^{10}.d^{10}.e^{10}}}{3c^2de} = \frac{ab}{ce}\sqrt[15]{52488cd^4e^{10}f^{12}}.$$

2) $$\frac{8ab^2c\sqrt[3]{2a^2bc^2}}{4ab^3\sqrt[4]{6ab^3}}.$$ 3) $$\frac{8ac\sqrt[4]{8(a+b)^3c^2d}}{2bc\sqrt[8]{6(a+b)c^6d^4}}.$$ 4) $$\frac{16a^mb^mc^m\sqrt[6]{24(x+y)^2(x-z)^3}}{4a^pb^qd^r\sqrt[9]{6(x+y)^4(x-z)^5}}.$$

Aufgabe XIX *).

Einen Buchstabenausdruck durch einen mehrgliedrigen Wurzelausdruck zu dividiren.

---

*) Da das Rechnen mit Logarithmen doch auf dieser Stufe nicht erschöpft werden und der Lehrer selbst einige Aufgaben entwerfen kann, so hat man, um nicht einen neuen Bogen anfangen zu müssen, mit den Aufgaben und Beispielen zur Radikation geschlossen.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe gehört nur in den wenigsten Fällen der gewöhnlichen Buchstabenrechnung an, und erfordert in den meisten andern Fällen tiefere Kenntniß der Algebra und Analysis. Die einfachsten Aufgaben der Art, die sich auf dieser Stufe lösen lassen, sind folgende:

1) Der Divisor hat die Form $A \pm c\sqrt{B}$. Man multiplizire Dividend und Divisor mit $A \pm c\sqrt{B}$ (§ 76.)

Beispiele:

5) $\frac{6}{4+2\sqrt{3}} = \frac{6(4-2\sqrt{3})}{4^2-2.3} = \frac{24-12\sqrt{3}}{10} = \frac{12-6\sqrt{3}}{5}$.

6) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$. 7) $\frac{9}{8+\sqrt{10}}$. 8) $\frac{20\sqrt{4}}{10-3\sqrt{5}}$. 9) $\frac{48}{6-2\sqrt{3}}$.

10) $\frac{12}{5-\sqrt{21}}$. 11) $\frac{8+4\sqrt{7}}{4-2\sqrt{7}}$. 12) $\frac{25-5\sqrt{10}}{5-2\sqrt{10}}$.

2) Der Divisor hat die Form $a\sqrt{A} \pm b\sqrt{B}$. Man multiplizire Dividend und Divisor mit $a\sqrt{A} \mp b\sqrt{B}$.

Beispiele:

13) $\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{5}+2\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})} = \frac{18-5\sqrt{10}}{2^2.5-3^2.2} = \frac{18-5\sqrt{10}}{2}$.

14) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$. 15) $\frac{5-7\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. 16) $\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}{3\sqrt{6}+1\sqrt{5}}$.

17) $\frac{8\sqrt{10}+2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}+2\sqrt{10}}$. 18) $\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$, 19) $\frac{\sqrt{30}+2\sqrt{15}}{7\sqrt{15}-4\sqrt{30}}$.

Staatliche Bibliothek Bamberg

Berlin, gedruckt bei J. Weckerle, Stralauer-Straße № 33.

Formeln-Tafel.

I. Addition.

I. $a+b=b+a$ [§ 8.]
II. $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$ [§ 8.]

II. Multiplikation.

I. $a.b=b.a.$ [§§ 18. 23.]
II. $(a.b).c=(a.c).b=a.(b.c).$ [§ 18.]

III. Potenzirung.

I. fehlt.
II. $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}.$ [§ 31.]

IV. Subtraktion.

I. $(a-b)+b=a.$ [§ 38.]
II. $(a+b)-b=a.$ [§ 38.]
III. $a-(a-b)=b.$ [§ 38.]

V. Division.

I. $(\frac{a}{b})b=a.$ [§ 58.]
II. $\frac{ab}{b}=a.$ [§ 58.]
III. $\frac{a}{a:b}=b.$ [§ 58.]

VI. Radikation.

I. $(\sqrt[m]{a})^m=a.$ [§ 83.]
II. $\sqrt[m]{(a^m)}=a.$ [§ 83.]

VII. Logarithmation.

I. $a^{\overset{a}{\ell}(a^m)}=a^m.$ [§ 98.]
II. $\overset{a}{\ell}(a^m)=m.$ [§ 98.]

Verbindung der Addition und Subtraktion.

1) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)=a-(c-b).$ [§ 44.]
2) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$ [47.]

α. $(a-m)+(b-n)=(a+b)-(m+n)$ [§§ 50.51.]*)
β. $(a-m)-(b-n)=(a-m)+(n-b)=(a+n)-(b+m)=(a-b)-(m-n)$ [§ 52.]
γ. $a-b=(a+m)-(b+m)=(a-m)-(b-m)$ [52.]

Verbindung der Multiplikation und Division.

1) $\frac{a.b}{c}=\left(\frac{a}{c}\right).b=a\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{a}{c:b}.$ [§ 70.]
2) $\frac{a:b}{c}=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{bc}.$ [§ 74.]

α. $\frac{a}{m}.\frac{b}{n}=\frac{a.b}{m.n}.$ [§ 68.]
β. $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{an}{bm}=\frac{a:b}{m:n}$ [§ 72.]
γ. $\frac{a}{b}=\frac{a.m}{b.n}=\frac{a:m}{b:n}$ [§ 76.]

Formeln für das Rechnen mit Potenzen.

1) $a^m.a^n=a^{m+n}.$ [§ 29.]
2) $a^m.b^m=(a.b)^m.$ [§ 33.]
3) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$ [§ 79.]
4) $\frac{a^m}{b^m}=(\frac{a}{b})^m.$ [§ 78.]

Formeln für das Rechnen mit Wurzelausdrücken.

1) $\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{(a.b)}.$ [§ 87.]
2) $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$ [§ 91.]
3) $(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{(a^n)}.$ [§ 89.]
4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$ [§ 93.]

Formeln für das Rechnen mit Logarithmen.

1) $\overset{m}{\ell}(a.b)=\overset{m}{\ell}a+\overset{m}{\ell}b.$ [§ 102.]
2) $\overset{m}{\ell}\left(\frac{a}{b}\right)=\overset{m}{\ell}a-\overset{m}{\ell}b.$ [§ 104.]
3) $\overset{n}{\ell}(a^m)=m\overset{n}{\ell}a.$ [§ 106.]
4) $\overset{n}{\ell}(\sqrt[m]{a})=\frac{\overset{n}{\ell}a}{m}.$ [§ 108.]

Verbindung der Addition und Subtraktion mit der Multiplikation und Division.

1) $(a+b)m=am+bm.$ [§ 17.]
2) $(a-b)m=am-bm.$ [§ 53.]
3) $\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$ [§ 63.]
4) $\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$ [§ 63.]

*) Aus Mangel an Raum ist meist nur ein § citirt, obgleich dieselbe Formel stets zwei und oft mehreren §§ angehört.

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Bei **Albert Förstner** (früher **W. Schüppel**) zu Berlin ist früher erschienen:

Sachs, S., Königl. Regierungs-Bauinspector, Elementar-Unterricht in der reinen und angewandten Mathematik, so wie in den damit in Beziehung stehenden Wissenschaften. Durchaus faßlich und praktisch dargestellt und für den Gebrauch in Kunst-, Gewerbe- und Bürgerschulen, auch zum Selbstunterricht entworfen. 3 Bde. in gr. 8. Mit 76 Kupfertafeln. 1835. 11⅓ Rthlr.

[Der erste Band dieses Werkes enthält: die theoretische und praktische Arithmetik; der zweite: die reine und praktische Geometrie; der dritte: die Dynamik, Optik und Akustik.]

Jeder der drei Bände, aus welchen dieses Elementar-Werk besteht, ist auch einzeln, und zwar unter nachstehenden Titeln zu haben:

Sachs, S., Lehrbuch der theoretischen und praktischen Arithmetik, oder Inbegriff alles Wissenswürdigen aus dem Gebiete der niederen und höheren Arithmetik. Mit steter Rücksicht auf die Anwendung für das Leben, zum Gebrauch in Kunst-, Gewerbe- und Bürgerschulen, so wie auch zum Selbstunterricht entworfen. gr. 8. 1833. 1⅓ Rthlr.

Derselbe, Lehrbuch der reinen und praktischen Geometrie, oder Inbegriff alles Wissenswürdigen aus dem Gebiete der niederen geometrischen Wissenschaften. Mit steter Rücksicht für die Anwendung auf das Leben rc. gr. 8. 1833. Mit 16 Kupfertafeln. 2½ Rthlr.

Derselbe, Lehrbuch der angewandten Mathematik, oder Inbegriff alles Wissenswürdigen aus dem Gebiete der dynamischen, optischen und akustischen Wissenschaften. Mit steter Rücksicht rc. gr. 8. 1835. Mit 60 Kupfertafeln. 7½ Rthlr.

Zu jedem dieser Lehrbücher ist auch gleichzeitig noch ein kurzer Abriß als Leitfaden für den Lehrer beim Unterricht und als Anhalt für den Schüler bei seinen häuslichen Repetitionen unter nachstehenden Titeln erschienen:

Sachs, S., kurzer Abriß der theoretischen und praktischen Arithmetik. Nach dem ersten Theile des Elementar-Unterrichts in der reinen und angewandten Mathematik, zum Gebrauche in Kunst-, Gewerbe- und Bürgerschulen, als Leitfaden für den Lehrer beim Unterricht und als Anhalt für den Schüler bei seinen häuslichen Repetitionen. gr. 8. 1833. ⅓ Rthlr.

Derselbe, kurzer Abriß der reinen und praktischen Geometrie. Nach dem zweiten Theile des Elementar-Unterrichts rc. gr. 8. 1833. Ohne Kupfert. ½ Rthlr., mit 16 Kupfert. 1½ Rthlr.

Derselbe, kurzer Abriß der angewandten Mathematik. Nach dem dritten Theile des Elementar-Unterrichts in der reinen und angewandten Mathematik rc. gr. 8. 1835. Ohne Kupfert. 1¼ Rthlr., mit 60 Kupfert. 4 1/12 Rthlr.

Eben so sind auch die Kupfer zu diesem Werke unter nachstehenden Titeln und zu den beigesetzten Preisen einzeln zu haben:

Sachs, S., Kupfersammlung zum Lehrbuch der reinen und praktischen Geometrie. 16 Platten, nebst einem erläuternden Vorwort und Erklärung der einzelnen Figuren. gr. 4. 1835. Geheftet 1 Rthlr.

Derselbe, Kupfersammlung zum Lehrbuch der angewandten Mathematik. 60 Platten, nebst einem erläuternden Vorwort und Erklärung der einzelnen Figuren. gr. 4. 1835. Geheftet 3⅓ Rthlr.

Derselbe, unterhaltende Verstandesübungen aus dem Gebiete der mathematischen Analysis. Schulmännern, Eltern und Erziehern gewidmet. Klasse I, II, III, IV u. V, Heft 1. 8. 1836. Jedes Heft einzeln ⅓ Rthlr.

Francke, Karl Ludw., Zeichnenlehrer am Seminar für Stadtschulen und am Königl. Friedr. Wilh. Gymnasium rc. Die Elemente der Perspektive und Schattenlehre in Beziehung auf Naturzeichnen und Aufnehmen ganzer Gegenden im Freien. Für den Schul- und Selbstunterricht und als Anleitung zum leichteren Verstehen größerer Werke über Perspektive bearbeitet. Mit 5 Kupfert. gr. 8. 1836. ⅔ Rthlr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mager, Karl,

Wissenschaft der Mathematik nach heuristisch-genetischer Methode Leitfaden beim Schulunterricht

Bd.: 1

Berlin 1837

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.140
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739942-9